Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 6

ESPCEX 2011-2016

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx) dos anos de 2011 a 2016, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte A serão apresentadas as provas de 2008 a 2015, totalizando 124 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 6 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da EsPCEx ou concursos afins e também para aqueles que apreciam a Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ) em 2015; participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog “Mademática”.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meu filho Daniel que eu espero seja um futuro leitor deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.mademática.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 5A COLÉGIO NAVAL 2008-2015

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2015/2016

1) Fazendo $x = \ln 5$ temos que $y = e^x - e^{-x} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, a e b primos entre si. Logo $a + b$ é igual a
a) 28
b) 29
c) 40
d) 51
e) 52

2) Considere as equações de nove retas distintas do plano cartesiano:

$r_1 : y = 3x - 2$ $\quad r_2 : 3x + y + 1 = 0$ $\quad r_3 : -x - 3y - 1 = 0$

$r_4 : y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ $\quad r_5 : 3x + 9y + 2 = 0$ $\quad r_6 : y = -3x + 7$

$r_7 : 6x + 2y + 4 = 0$ $\quad r_8 : -3x - y - 9 = 0$ $\quad r_9 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

Sorteando aleatoriamente e sem reposição duas retas dessa lista, a probabilidade de obter duas retas cuja interseção é um conjunto não vazio é
a) 0,15
b) 0,25
c) 0,50
d) 0,75
e) 0,85

3) Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é igual a
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

4) Considere os polinômios $p(x) = x^{80} + 3x^{79} - x^2 - x - 1$ e $b(x) = x^2 + 2x - 3$. Sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $b(x)$, o valor de $r\left(\frac{1}{2}\right)$ é igual a
a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) 1

d) 2
e) $\frac{5}{2}$

5) Considere as funções reais f e g, tais que $f(x)=\sqrt{x}+4$ e $f(g(x))=x^2-5$, onde $g(x)$ é não negativa para todo x real. Assinale a alternativa cujo conjunto contém todos os possíveis valores de x, que satisfazem os dados do enunciado.
a) $\mathbb{R}-]-3,3[$
b) $\mathbb{R}-]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$
c) $]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$
d) $]-3,3[$
e) $\mathbb{R}-]-\infty,3[$

6) Se $(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)=x+iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $\sqrt{3}\cdot x+y$ é
a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $3\sqrt{6}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) Considere o polinômio $p(x)=x^6-2x^5+2x^4-4x^3+x^2-2x$. Sobre as raízes de $p(x)=0$, podemos afirmar que
a) quatro raízes são reais distintas.
b) quatro raízes são reais, sendo duas iguais.
c) apenas uma é real.
d) apenas duas raízes são reais e iguais.
e) apenas duas raízes são reais distintas.

8) Considere as afirmações:

I – Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

II – Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0)$ e $F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2-9y^2=576$.

III – A parábola $8x=-y^2+6y-9$ tem como vértice o ponto $V(3,0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

9) As medidas as arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida da sua área total, em cm^2, é
a) 752
b) 820
c) 1024
d) 1302
e) 1504

10) A solução da equação $\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \frac{182(x-2)! - x!}{2(x-2)!}$ é um número natural
a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

11) Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(4,0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3,-2)$, tem por equação
a) $3x-2y-13=0$
b) $2x-3y-12=0$
c) $2x-y-8=0$
d) $x-5y-13=0$
e) $8x+3y-18=0$

12) João e Maria iniciam juntos uma corrida, partindo de um mesmo ponto. João corre uniformemente 8 km por hora e Maria corre 6 km na primeira hora e acelera o passo de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km cada hora que se segue. Assinale a alternativa correspondente ao número de horas corridas para que Maria alcance João.
a) 3
b) 5
c) 9
d) 10
e) 11

13) Da análise combinatória, pode-se afirmar que
a) o número de múltiplos inteiros e positivos de 11, formados por três algarismos, é igual a 80.
b) a quantidade de números ímpares de quatro algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5 e 6 é igual a 24.
c) o número de anagramas da palavra ESPCEX que têm as vogais juntas é igual a 60.
d) no cinema, um casal vai sentar-se em uma fileira com dez cadeiras, todas vazias. O número de maneiras que poderão sentar-se em duas cadeiras vizinhas é igual a 90.
e) a quantidade de funções injetoras definidas em $A=\{1,3,5\}$ com valores em $B=\{2,4,6,8\}$ é igual a 24.

14) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

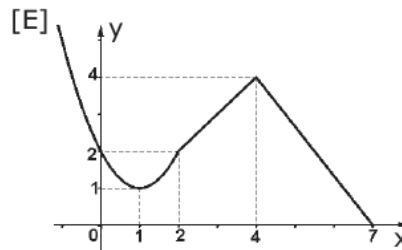
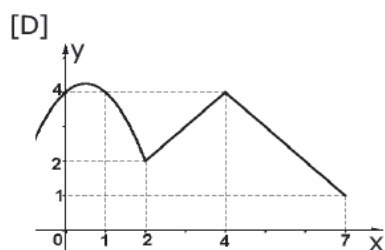
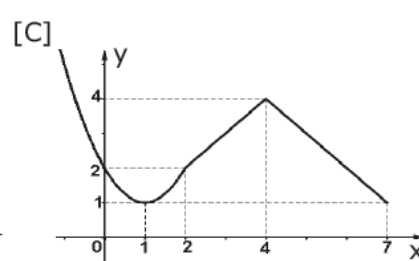
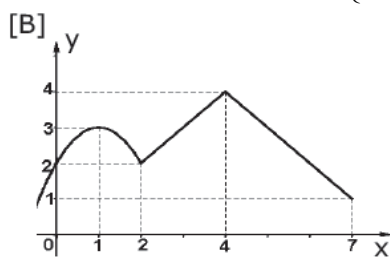
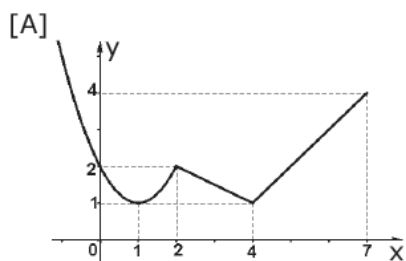
a) $\frac{2}{3}R$
b) $\frac{3}{4}R$
c) $\frac{4}{9}R$
d) $\frac{1}{3}R$
e) $\frac{9}{16}R$

15) Considere a função real definida por $f(x)=\begin{cases} 2-|x-3|, & \text{se } x>2 \\ -x^2+2x+1, & \text{se } x\le 2 \end{cases}$, o valor de $f(0)+f(4)$ é

a) -8
b) 0
c) 1
d) 2
e) 4

16) Sendo R a maior das raízes da equação $\frac{11x+6}{x-4}=x^2$, então o valor de $2R-2$ é

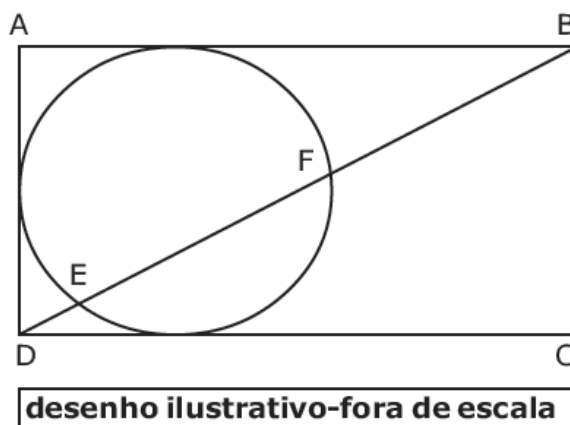
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

17) O gráfico que melhor representa a função real definida por $\begin{cases} 4-|x-4|, \text{ se } 2 < x \le 7 \\ x^2-2x+2, \text{ se } x \le 2 \end{cases}$ é

18) Um portal de igreja tem a forma de um arco de parábola, conforme figura abaixo. A medida da sua base AB é 4 m e da sua altura é 5 m. Um vitral foi colocado 3,2 m acima da base. Qual a medida CD da base, em metros?

a) 1,44
b) 1,80
c) 2,40
d) 3,00
e) 3,10

19) Na figura abaixo, a circunferência de raio 3 cm tangencia três lados do retângulo ABCD. Sabendo que a área deste retângulo é igual a $72\ \text{cm}^2$, a medida do segmento EF, em cm, é igual a:

desenho ilustrativo-fora de escala

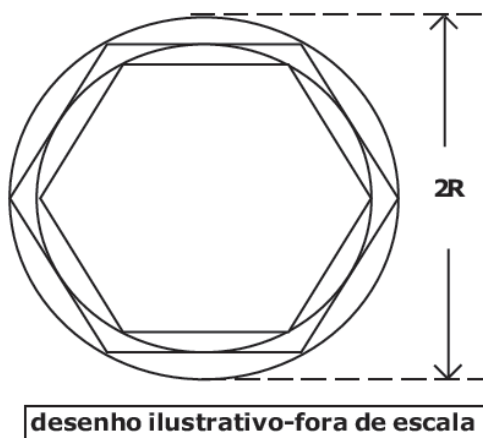
a) $3\sqrt{5}$

b) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

c) $6\sqrt{5}$

d) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

e) $12\sqrt{5}$

20) Considere o seguinte procedimento: em uma circunferência de diâmetro 2R, inscreve-se um hexágono regular para, em seguida, inscrever neste polígono uma segunda circunferência. Tomando esta nova circunferência, o processo é repetido gerando uma terceira circunferência. Caso esse procedimento seja repetido infinitas vezes, a soma dos raios de todas as circunferências envolvidas nesse processo é igual a:

desenho ilustrativo-fora de escala

a) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d) $R\left(2+\sqrt{3}\right)$

e) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2014/2015

1) De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. A probabilidade do número da primeira bola ser divisível por 4 e o número da segunda bola ser divisível por 5 é

a) $\frac{12}{245}$

b) $\frac{14}{245}$

c) $\frac{59}{2450}$

d) $\frac{59}{1225}$

e) $\frac{11}{545}$

2) O número de soluções da equação $\frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|x-3|=2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

3) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a seis meses do ano.
b) a população atinge seu máximo em $t=6$.
c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
d) a população média anual é de 6.000 animais.
e) a população atinde seu mínimo em $t=4$ com 6.000 animais.

4) Um fabricante de poltronas pode produzir cada peça ao custo de $R\$\,300,00$. Se cada uma for vendida por x reais, este fabricante venderá por mês $(600-x)$ unidades, em que $0\le x\le 600$. Assinale a alternativa que representa o número de unidades vendidas mensalmente que corresponde ao lucro máximo.

a) 150
b) 250
c) 350
d) 450
e) 550

5) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a

a) 110
b) 210
c) 310
d) 410
e) 510

6) Um cone de revolução tem altura $4\,\text{cm}$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\,\text{cm}$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$
b) $\frac{2}{3}\pi$
c) $\frac{4}{3}\pi$
d) $\frac{8}{3}\pi$
e) 3π

7) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a
a) 1000000
b) 1111100
c) 6000000
d) 6666000
e) 6666600

8) Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \le \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$
c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$
d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$
e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

9) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$. Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é
a) -10
b) -4
c) 0
d) 4
e) 10

10) Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais está definida a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.
a) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
b) $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$
c) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$
d) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
e) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

11) Sabendo que “c” e “d” são números reais, o maior valor de “d” tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x + c, & \text{para } x \geq d \\ x^2 - 4x + 3, & \text{para } x < d \end{cases}$ seja injetora é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

12) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ tem como algumas de suas raízes os números -1 e 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais s função $f(x)$ é positiva.
a) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
b) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
c) $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$
d) $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
e) $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$

13) Considere a função bijetora $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a + b$ é
a) 2
b) 4

c) 6
d) 8
e) 10

14) Seja x um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos são definidos por $a_{ij} = i - j$. Sobre a equação em x definida por $\det(A - xI) = x + \det A$ é correto afirmar que

a) as raízes são 0 e $\frac{1}{2}$.
b) todo x real satisfaz a equação.
c) apresenta apenas raízes inteiras.
d) uma raiz é nula e a outra negativa.
e) apresenta apenas raízes negativas.

15) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$
b) $(-1,-2)$
c) $(-4,4)$
d) $(3,8)$
e) $(3,2)$

16) A representação geométrica, no Plano de Argand-Gauss, do conjunto de pontos que satisfazem a condição $|z + 2 - 3i| = |z - 1 + 4i|$, com $z = x + yi$, sendo x e y números reais, é a reta de equação

a) $2x - 3y + 7 = 0$
b) $3x - 7y - 2 = 0$
c) $2x - 3y + 3 = 0$
d) $4x - 3y + 3 = 0$
e) $2x - y = 0$

17) O valor de $(\cos 165^\circ + \operatorname{sen} 155^\circ + \cos 145^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$ é

a) $\sqrt{2}$
b) -1
c) 0
d) 1
e) $\frac{1}{2}$

18) A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 5π

e) 6π

19) Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x = 3y^2$ no ponto P. Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a) $t: x - 10y + 3 = 0$ e $P(27,3)$

b) $t: 2x - 15y + 6 = 0$ e $P(12,2)$

c) $t: 2x + 15y + 6 = 0$ e $P(12,-2)$

d) $t: y = 0$ e $P(0,0)$

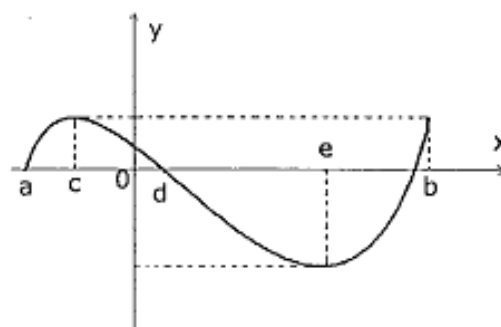
e) $t: x + 6y + 3 = 0$ e $P(3,-1)$

20) Na figura temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a

desenho ilustrativo-fora de escala

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2013/2014

1) Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a,b]$. Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:

desenho ilustrativo - fora de escala

a) f é crescente no intervalo $[a,0]$.

b) $f(x) \leq f(e)$ para todo x no intervalo $[d,b]$.

c) $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo $[c,0]$.

d) a função f é decrescente no intervalo $[c,e]$.

e) se $x_1 \in [a,c]$ e $x_2 \in [d,e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

2) Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$. Qual foi a largura do rio que ele encontrou?

a) $9\sqrt{3}$ metros.

b) $3\sqrt{3}$ metros.

c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros.

d) $\sqrt{3}$ metros.

e) $4,5$ metros.

3) Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km^2, a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

a) $\frac{23}{2}\pi$

b) $\frac{23}{4}\pi$.
c) $\frac{385}{8}\pi$.
d) $\frac{195}{4}\pi$.
e) $\frac{529}{4}\pi$.

4) Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento se um número múltiplo de 12 é:
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{5}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{8}$

5) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x)=3x^2-12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x)=5x^2-40x-40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultate das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a
a) 4 lotes.
b) 5 lotes.
c) 6 lotes.
d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

6) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker, wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers.*
- 170 pessoas compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers*, *cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas comram *wafers* e recheados.
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

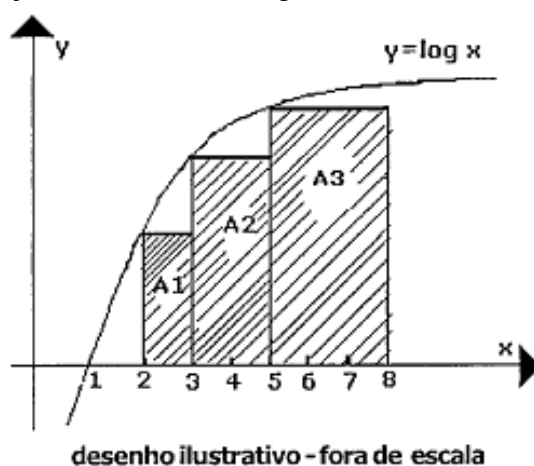
Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.
a) 200

b) 250
c) 320
d) 370
e) 530

7) Sobre a curva $9x^2+25y^2-36x+50y-164=0$, assinale a alternativa correta.
a) Seu centro é $(-2,1)$.
b) A medida do seu eixo maior é 25.
c) A medida do seu eixo menor é 9.
d) A distância focal é 4
e) Sua excentricidade é $0,8$.

8) Considere uma laranja que tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície de cada gomo mede:
a) $\frac{4^3\pi}{3}\text{ cm}^2$
b) $\frac{4^3\pi}{9}\text{ cm}^2$
c) $\frac{4^2\pi}{3}\text{ cm}^2$
d) $\frac{4^2\pi}{9}\text{ cm}^2$
e) $4^3\pi\text{ cm}^2$

9) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y=\log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:

desenho ilustrativo - fora de escala

a) $\log 2+\log 3+\log 5$
b) log30
c) $1+\log 30$
d) $1+2\log 15$
e) $1+2\log 30$

10) Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:
a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\le x\le 2\}$
b) $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le -\frac{1}{2}\right\}$
c) $\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{1}{2}\le x\le 1 \text{ ou } x\ge 2\right\}$
d) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne 2\}$
e) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne 2 \text{ e } x\ne 1\}$

11) Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t)=\frac{20000}{2+15\cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2\cong 0{,}30$ e $\log 3\cong 0{,}48$, 2000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em
a) 7 dias.
b) 19 dias.
c) 3 meses.
d) 7 meses.
e) 1 ano.

12) As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote e nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura. Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contém os possíveis valores de x.

desenho ilustrativo - fora de escala

a) $[6,10]$
b) $[8,14]$
c) $[10,18]$
d) $[16,24]$
e) $[12,24]$

13) O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{2}$
c) 0
d) -2
e) $-\frac{1}{3}$

14) Sendo z o número complexo obtido na rotação de 90°, em relação à origem, do número complexo $1+i$, determine z^3:
a) $1-i$
b) $-1+i$
c) $-2i$
d) $-1-2i$
e) $2+2i$

15) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é
a) 18 cm^3.
b) 36 cm^3.
c) $18\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
d) $36\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
e) 40 cm^3.

16) Se $Y = \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que } |6y-1| \geq 5y-10\}$, então:
a) $Y = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$
b) $Y = \{-1\}$
c) $Y = \mathbb{R}$
d) $Y = \varnothing$
e) $Y = \left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$

17) Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+25=0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1,1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.

a) $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$
b) $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$
c) $\lambda : x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$
d) $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$
e) $\lambda : x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

18) De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z - (2 - 2i)| = 1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 é igual a:
a) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

19) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha:	1					
2ª linha:	3	5				
3ª linha:	7	9	11			
4ª linha:	13	15	17	19		
5ª linha:	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43^a linha, na horizontal, é:
a) 807
b) 1007
c) 1307
d) 1507
e) 1807

20) Dado o polinômio $q(x)$ que satisfaz a equação $x^3 + ax^2 - x + b = (x-1) \cdot q(x)$ e sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, determine o intervalo no qual $q(x) \le 0$:
a) $[-5, -4]$
b) $[-3, -2]$
c) $[-1, 2]$
d) $[3, 5]$
e) $[6, 7]$

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2012/2013

1) Considere a circunferência $(\lambda)\, x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

b) $2+\sqrt{3}$

c) 3

d) $3+\sqrt{3}$

e) $3+3\sqrt{3}$

2) Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio de base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será:

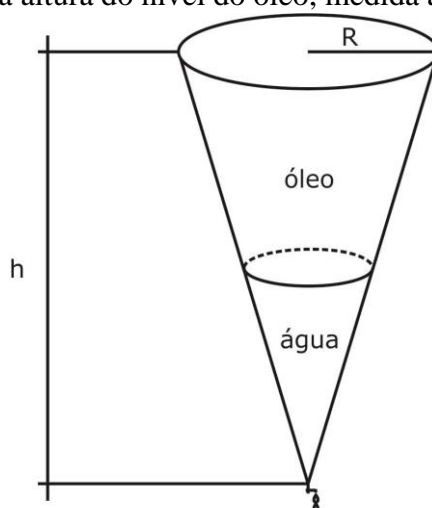



Figura fora de escala

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

3) A probabilidade de se obter um número divisível por 2 na escolha ao acaso de uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 é

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2}$

4) A figura geométrica formada pelos afixos das raízes complexas da equação $x^3 - 8 = 0$ tem área igual a

a) $7\sqrt{3}$

b) $6\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{3}$

d) $4\sqrt{3}$

e) $3\sqrt{3}$

5) Se $\frac{6 - \log_a m}{1 + \log_{a^2} m} = 2$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $m > 0$, então o valor de $\frac{\sqrt{m}}{a + \sqrt{m}}$ é

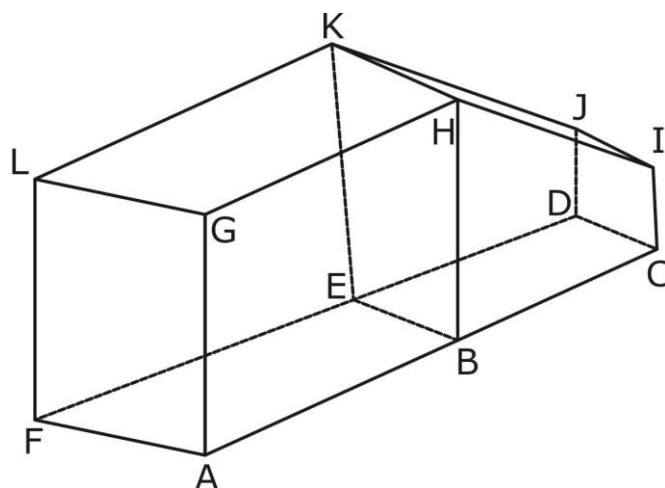
a) 4

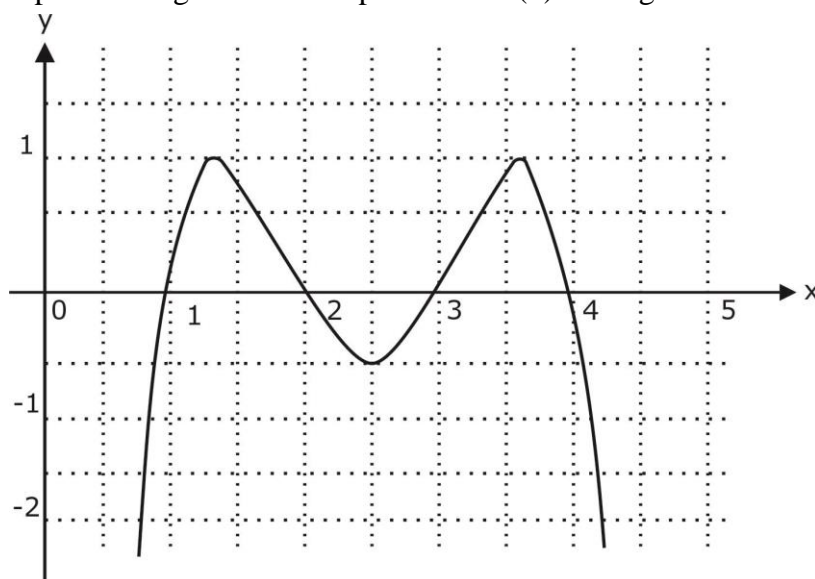
b) $\frac{1}{4}$

c) 1

d) 2

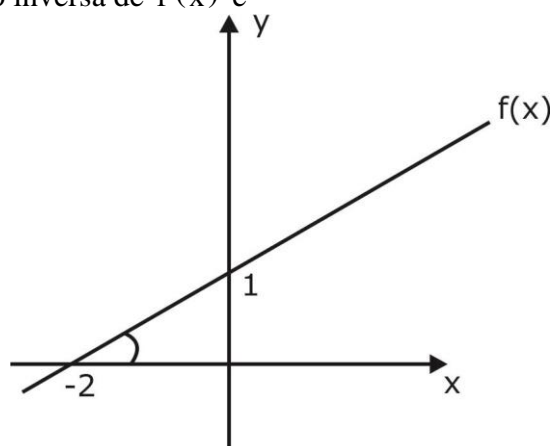
e) $\frac{1}{2}$

6) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguinte pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

a) concorrentes; reversas; reversas.
b) reversas; reversas; paralelas.
c) concorrentes; reversas; paralelas.
d) reversas; concorrentes; reversas.
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

7) A figura a seguir apresenta o gráfico de um polinômio P(x) do 4° grau no intervalo $]0,5[$.

O número de raízes reais da equação $P(x)+1=0$ no intervalo $]0,5[$ é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

8) Em uma progressão aritmética, a soma S_n de seus n primeiros termos é dada pela expressão $S_n = 5n^2 - 12n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. A razão dessa progressão é
a) -2

b) 4
c) 8
d) 10
e) 12

9) Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função real do 1° grau $f(x)$. A expressão algébrica que define a função inversa de $f(x)$ é

a) $y=\frac{x}{2}+1$
b) $y=x+\frac{1}{2}$
c) $y=2x-2$
d) $y=-2x+2$
e) $y=2x+2$

10) Sendo $\overline{Z}$ conjugado do número complexo Z e i a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição $Z+2\cdot\overline{Z}=2-Z\cdot i$ é
a) $Z=0+1\cdot i$
b) $Z=0+0\cdot i$
c) $Z=1+0i$
d) $Z=1+i$
e) $Z=1-i$

11) Um polinômio $q(x)$, do 2° grau, é definido por $q(x)=ax^2+bx+c$, com a, b e c reais, $a\neq 0$. Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x)=q(1-x)$, para todo x real, é
a) $q(x)=a(x^2+x)+c$
b) $q(x)=a(x^2-x)+c$
c) $q(x)=a^2(x^2-x)+c$
d) $q(x)=a^2(x^2+x)+c$
e) $q(x)=ax^2+c$

12) Considere as seguintes afirmações:

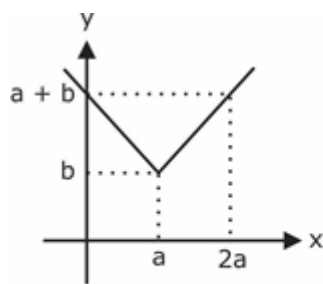
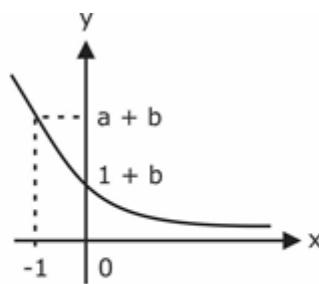
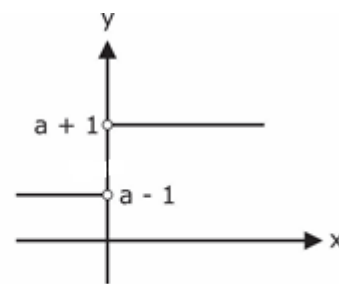
(I) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;
(II) Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano α é a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de 60°;
(III) Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;
(IV) Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.
Estão corretas as afirmações
a) Apenas I e II
b) Apenas II e III
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

13) Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & x\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}x & y+4\\ y & 3\end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de $x+y$ é
a) -1
b) -2
c) -3
d) -4
e) -5

14) Seja a função $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{se x for racional}\\ 2x^4, & \text{se x for irracional}\\ x^2+8, & \text{se x não for real}\end{cases}$.
Assim, o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(i^{64}+5i^{110}\right)+f\left(f\left(\sqrt{-2}\right)\right)$, em que $i^2=-1$ é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

15) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento m na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento m é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.
Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é

a) 3m
b) 4m
c) 5m
d) 6m
e) 7m

16) Na figura abaixo estão representados os gráficos de três funções reais, sendo $a > 1$ e $b > 0$.

As expressões algébricas que podem representar cada uma dessas funções são, respectivamente,

a) $y = |x - a| - b$; $y = \left(\dfrac{1}{1+b}\right)^x + a$ e $y = \dfrac{|x+a|}{x-a}$

b) $y = |x - a| + b$; $y = (1+a)^x + b$ e $y = \dfrac{|x|}{x} + a$

c) $y = |x + a| = b$; $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x + b$ e $y = \dfrac{|x+a|}{x+a}$

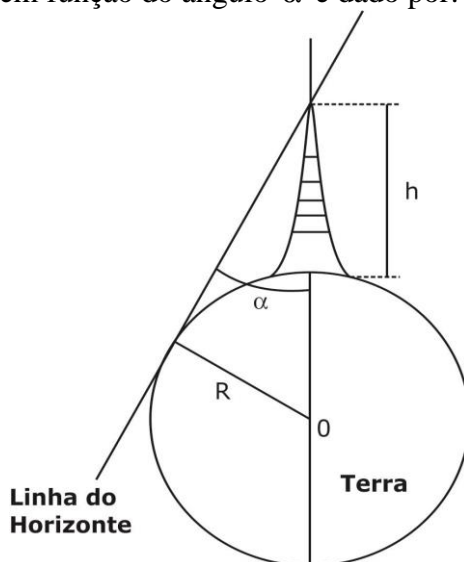
d) $y = |x - a| + b$; $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x + b$ e $y = \dfrac{|x|}{x} + a$

e) $y = |x + a| + b$; $y = \left(\dfrac{1}{1+b}\right)^x + a$ e $y = \dfrac{|x+a|}{x-a}$

17) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos,
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de
a) 6 acertos e 2 erros.
b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros.
d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

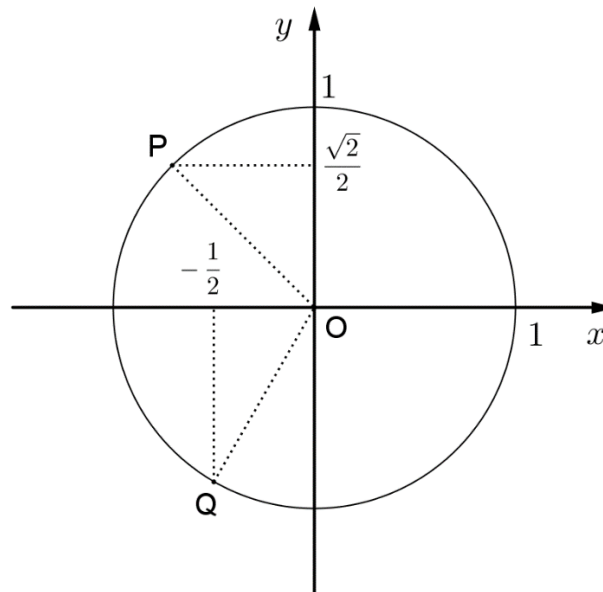
18) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:

a) $R=\dfrac{\text{sen}(\alpha h)}{1-\text{sen}\,\alpha}$

b) $R=\dfrac{h\text{sen}\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$

c) $R=\dfrac{h\text{sen}\alpha}{\text{sen}\,\alpha-1}$

d) $R=\dfrac{1-\text{sen}\,\alpha}{h\text{sen}\alpha}$

e) $R=\dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{h\text{sen}\alpha}$

19) Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1,0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo. O valor de $\text{tg}(\alpha+\beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

c) $2+\sqrt{3}$

d) $2-\sqrt{3}$

e) $-1+\sqrt{3}$

20) Sejam as funções reais $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ e $g(x)=x-1$. O domínio da função $f(g(x))$ é

a) $D=\{x\in\mathbb{R} | x\leq -3 \text{ ou } x\geq 1\}$

b) $D=\{x\in\mathbb{R} | -3\leq x\leq 1\}$

c) $D=\{x\in\mathbb{R} | x\leq 1\}$

d) $D=\{x\in\mathbb{R} | 0\leq x\leq 4\}$

e) $D=\{x\in\mathbb{R} | x\leq 0 \text{ ou } x\geq 4\}$

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2011/2012

1) Considere as funções reais $f(x)=3x$, de domínio $[4,8]$ e $g(y)=4y$, de domínio $[6,9]$. Os valores máximo e mínimo que o quociente $\frac{f(x)}{g(y)}$ pode assumir são, respectivamente

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$ e 1
c) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$
d) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{3}$
e) 1 e $\frac{1}{3}$

2) Seja o número complexo $z=\frac{x+yi}{3+4i}$, com x e y reais e $i^2=-1$. Se $x^2+y^2=20$, então o módulo de z é igual a:
a) 0
b) $\sqrt{5}$
c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) 4
e) 10

3) O domínio da função real $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x^2-8x+12}$ é
a) $]2,\infty[$
b) $]2,6[$
c) $]-\infty,6]$
d) $]-2,2]$
e) $]-\infty,2[$

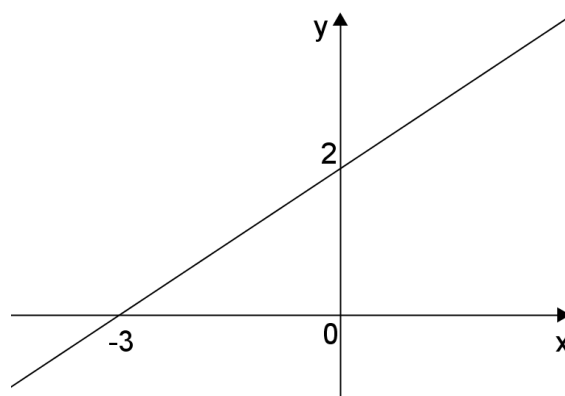
4) Na Física, as leis de Kepler descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol. Define-se como período de um planeta o intervalo de tempo necessário para que este realize uma volta completa ao redor do Sol. Segundo a terceira lei de Kepler, “Os quadrados dos períodos de revolução (T) são proporcionais aos cubos das distâncias médias (R) do Sol aos planetas”, ou seja, $T^2=kR^3$, em que k é a constante de proporcionalidade.
Sabe-se que a distância do Sol a Júpiter é 5 vezes a distância Terra-Sol; assim, se denominarmos T ao tempo necessário para que a Terra realize uma volta em torno do Sol, ou seja, ao ano terrestre, a duração do “ano” de Júpiter será

a) $3\sqrt{5}T$
b) $5\sqrt{3}T$
c) $3\sqrt{15}T$
d) $5\sqrt{5}T$
e) $3\sqrt{3}T$

5) Considerando $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, o número real x, solução da equação $5^{x-1} = 150$, pertence ao intervalo:
a) $]-\infty, 0]$
b) $[4, 5[$
c) $]1, 3[$
d) $[0, 2[$
e) $[5, +\infty[$

6) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é
a) Ambos no primeiro quadrante.
b) Um no quarto quadrante e outro no eixo X.
c) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
d) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo Y.
e) Um no segundo quadrante e o outro no eixo X.

7) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$, a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a
a) 5^{-1}
b) -5^{-1}
c) 10
d) 10^{-1}
e) -10^{-1}

8) Considere a função real $f(x)$, cujo gráfico está representado na figura, e a função real $g(x)$, definida por $g(x) = f(x-1) + 1$.

O valor de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ é

a) -3
b) -2
c) 0
d) 2
e) 3

9) A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$, em que x é um número real,
a) não tem solução.
b) tem apenas uma solução.
c) tem apenas soluções positivas.
d) tem apenas soluções negativas.
e) tem soluções positivas e negativas.

10) O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$
b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$
c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$
d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$
e) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$

11) O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2\cdot\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + \left(\operatorname{tg} 2220^\circ\right)^2$ é:

a) -1
b) 0
c) $\frac{1}{2}$
d) 1

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12) A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo.

A expressão algébrica de $f(x)$ é

a) $f(x)=\begin{cases}-|\text{sen}\, x|, & \text{se } x<0\\ |\cos x|, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}|\cos x|, & \text{se } x<0\\ |\text{sen}\, x|, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

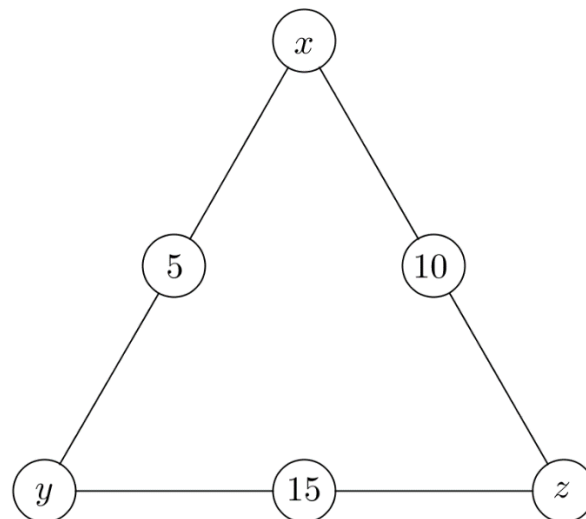
c) $f(x)=\begin{cases}-|\cos x|, & \text{se } x<0\\ |\text{sen}\, x|, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}|\text{sen}\, x|, & \text{se } x<0\\ |\cos x|, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}-\text{sen}\, x, & \text{se } x<0\\ \cos x, & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

13) Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em C, em que $B\hat{A}C=30°$. Neste triângulo está representada uma sequência de segmentos cujas medidas estão indicadas por $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, em que cada segmento é perpendicular a um dos lados do ângulo de vértice A. O valor $\frac{L_9}{L_1}$ é

a) $\frac{27\sqrt{3}}{128}$
b) $\frac{1}{128}$
c) $\frac{81}{256}$
d) $\frac{27}{64}$
e) $\frac{1}{256}$

14) A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.

Assim, o valor numérico da expressão $x - y \cdot z$
a) -2
b) -1
c) 2

d) 5
e) 10

15) Se todos os anagramas da palavra ESPCEX forem colocados em ordem alfabética, a palavra ESPCEX ocupará, nessa ordenação, a posição
a) 144
b) 145
c) 206
d) 214
e) 215

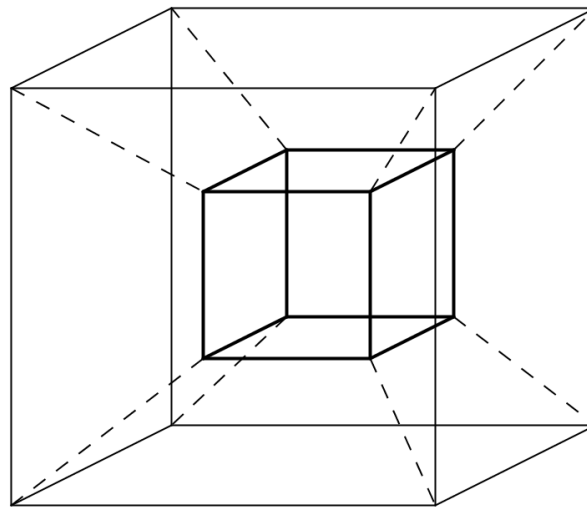
16) Se x é um número real positivo, então a sequência $(\log_3 x, \log_3 3x, \log_3 9x)$ é
a) uma progressão aritmética de razão 1.
b) uma progressão aritmética de razão 3.
c) uma progressão geométrica de razão 3.
d) uma progressão aritmética de razão $\log_3 x$.
e) uma progressão geométrica de razão $\log_3 x$.

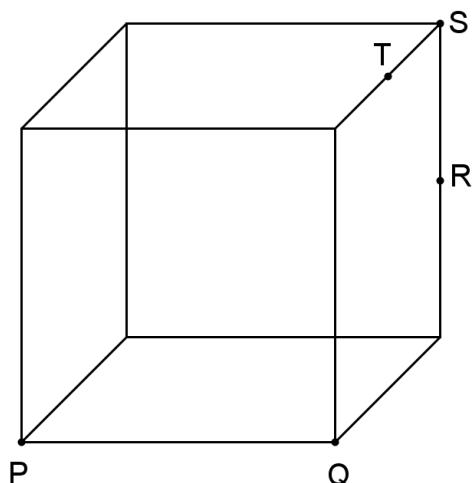
17) Pesquisas revelaram que, numa certa região, 4% dos homens e 10% das mulheres são diabéticos. Considere um grupo formado por 300 homens e 700 mulheres dessa região. Tomando-se ao acaso uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que essa pessoa seja diabética é
a) 4%
b) 5%
c) 5,4%
d) 7,2%
e) 8,2%

18) Considere as seguintes afirmações:
I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.
II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.
III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.
Dentre as afirmações acima, é(são) verdadeira(s)
a) Somente II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) I, II e III

19) Considere um plano α e os pontos A, B, C e D tais que
O segmento AB tem 6 cm de comprimento e está contido em α.
O segmento BC tem 24 cm de comprimento, está contido em α e é perpendicular a AB.
O segmento AD tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a α.
Nessas condições, a medida do segmento CD é

a) 26 cm
b) 28 cm
c) 30 cm
d) 32 cm
e) 34 cm

20) A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.
Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, 8 cm e 4 cm, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}$ cm
b) $3\sqrt{2}$ cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $4\sqrt{3}$ cm
e) $6\sqrt{3}$ cm

21) Na figura abaixo está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas. Sabe-se que a aresta desse cubo mede 2 cm. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos PQRST, em cm^3, é

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{5}{3}$
d) $\frac{16}{3}$
e) $\frac{32}{3}$

22) A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, T_1 e T_2, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.

O tanque T_1 contém gasolina pura e o tanque T_2 contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque T_1 para T_2 até que o teor de etanol na mistura em T_2 caia para 20%.

Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de T_1 e T_2 será

a) $\frac{1}{2}h$

b) $\frac{1}{3}h$

c) $\frac{1}{4}h$

d) $\frac{1}{5}h$

e) $\frac{1}{6}h$

23) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é

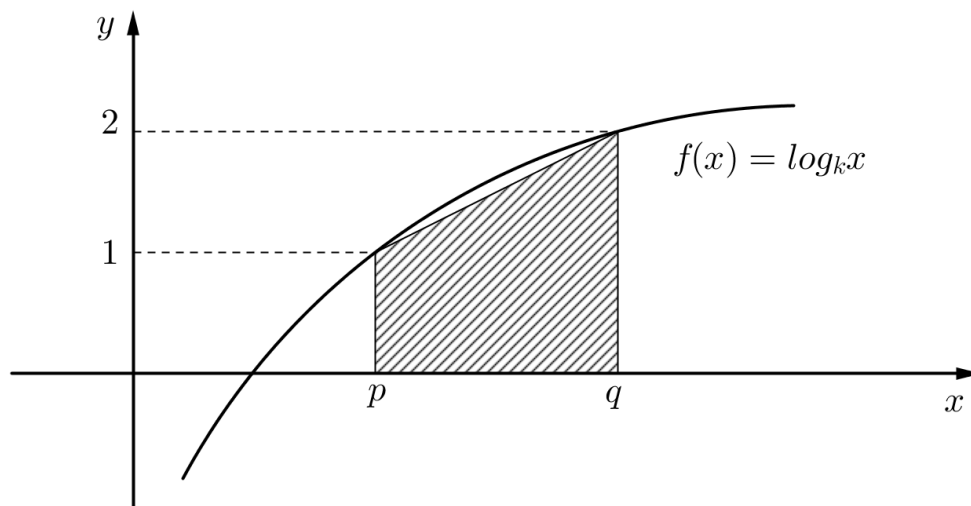



Gráfico fora de escala

a) -20
b) -15
c) 10
d) 15
e) 20

24) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ que tem ordenada máxima é
a) $(0,-6)$
b) $(-1,-3)$
c) $(-1,0)$
d) $(2,3)$
e) $(2,-3)$

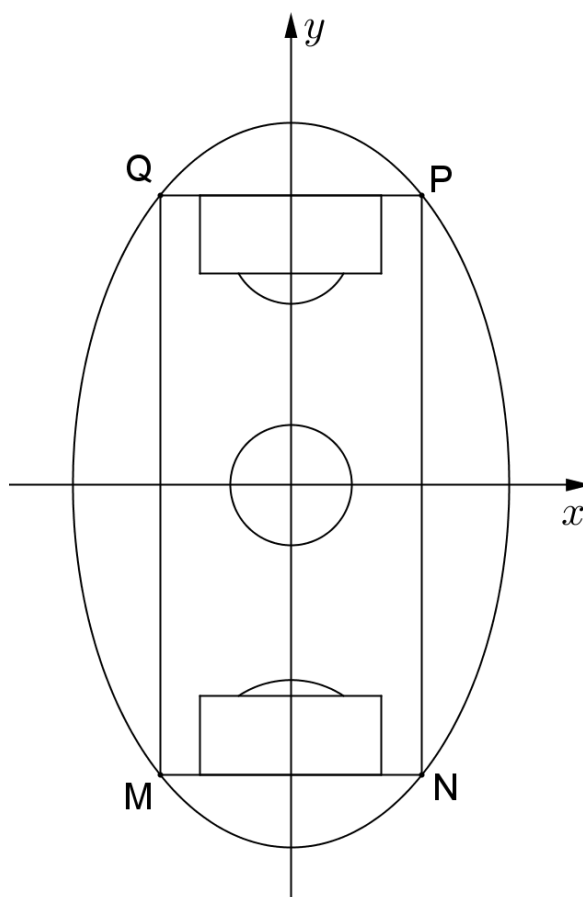
25) Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que $A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3) - B(-1)$ é igual a
a) 98
b) 100
c) 102
d) 103
e) 105

26) O ponto $P\left(a, \frac{1}{3}\right)$ pertence à parábola $x = \frac{y^2 + 3}{3}$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:
a) $27x + 27y - 37 = 0$
b) $37x + 27y - 27 = 0$
c) $27x + 37y - 27 = 0$
d) $27x + 27y - 9 = 0$

e) $27x + 37y - 9 = 0$

27) A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por
a) duas retas concorrentes.
b) uma circunferência.
c) uma elipse.
d) uma parábola.
e) uma hipérbole.

28) Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.

Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

a) 48 m
b) 68 m
c) 84 m
d) 92 m
e) 96 m

29) As medidas em centímetros das arestas de um bloco retangular são as raízes da equação polinomial $x^3 - 14x^2 + 64x - 96 = 0$. Denominando-se r, s e t essas medidas, se for construído um novo bloco retangular, com arestas medindo $(r-1)$, $(s-1)$ e $(t-1)$, ou seja, cada aresta medindo 1 cm a menos que a do bloco anterior, a medida do volume desse novo bloco será

a) 36 cm^3

b) 45 cm^3

c) 54 cm^3

d) 60 cm^3

e) 80 cm^3

30) Seja a função complexa $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$. Sabendo-se que $2+i$ é raiz de P, o maior intervalo I de números reais que faz $P(x) < 0$, para todo $x \in I$, é

a) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

b) $]0,1[$

c) $\left]\frac{1}{4}, 2\right[$

d) $]0,+\infty[$

e) $\left]-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2010/2011

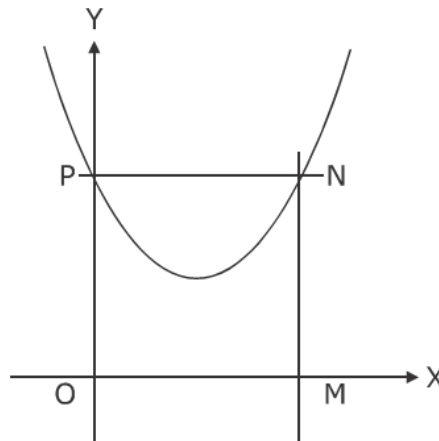
1) A represa de uma usina hidroelétrica está situada em uma região em que a duração do período chuvoso é 100 dias. A partir dos dados hidrológicos dessa região, os projetistas concluíram que a altura do nível da represa varia, dentro do período chuvoso, segundo a função real

$$N(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{5}+8, & \text{para } 0\le t<20\\ -\dfrac{t^2}{100}+\dfrac{4t}{5}, & \text{para } 20\le t<50\\ -\dfrac{3t}{25}+21, & \text{para } 50\le t\le 100\end{cases}$$

Em que $N(t)$ é a altura do nível da represa, medido em metros, t é o número de dias, contatos a partir do início do período chuvoso.

Segundo esse modelo matemático, o número de dias, dentro do período chuvoso, em que a altura do nível da represa é maior ou igual a 12 metros é

a) 40
b) 41
c) 53
d) 56
e) 60

2) Na figura abaixo, estão representados um sistema de eixos coordenados com origem O, o gráfico de uma função real do tipo $f(x)=ax^2+bx+c$ e o quadrado $OMNP$, com 16 unidades de área. Sabe-se que o gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos P e N, vértices do quadrado, e pelo ponto de encontro das diagonais desse quadrado. Assim, o valor de $a+b+c$ é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

3) Dada a expressão $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}$, em que x é um número real qualquer, podemos afirmar que
a) o maior valor que a expressão pode assumir é 3.
b) o menor valor que a expressão pode assumir é 3.
c) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{81}$.
d) o maior valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{27}$.
e) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{9}$.

4) Sendo $x = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$, com $\log_2 a = 4$ e $\log_2 b = 5$, em que a e b são números reais não nulos e diferentes de 1, então $\log_x 2$ é igual a
a) 16
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

5) O conjunto solução da inequação $x^{\log_x (x+1)^2} \le 4$, no conjunto dos números reais, é
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < 1\}$

6) Considerando a função real $f(x) = (x-1)\cdot|x-2|$, o intervalo real para o qual $f(x) \ge 2$ é
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \text{ ou } x \ge 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$

7) Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$. Se todos os termos consecutivos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

a) pentágono (5 lados)
b) hexágono (6 lados)
c) octógono (8 lados)
d) decágono (10 lados)
e) dodecágono (12 lados)

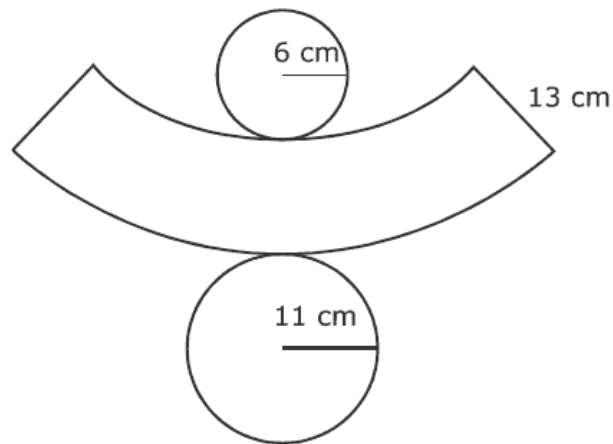
8) Os alunos de uma escola realizam experiências no laboratório de Química utilizando 8 substâncias diferentes. O experimento consiste em misturar quantidades iguais de duas dessas substâncias e observar o produto obtido. O professor recomenda, entretanto, que as substâncias S1, S2 e S3 não devem ser misturadas entre si, pois produzem como resultado o gás metano, de odor muito ruim. Assim, o número possível de misturas diferentes que se pode obter, sem produzir o gás metano é
a) 16
b) 24
c) 25
d) 28
e) 56

9) Um menino, de posse de uma porção de grãos de arroz, brincando com um tabuleiro de xadrez, colocou um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, oito grãos na quarta casa e continuou procedendo desta forma até que os grãos acabaram, em algum momento, enquanto ele preenchia a décima casa. A partir dessas informações, podemos afirmar que a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou na brincadeira é
a) 480
b) 511
c) 512
d) 1023
e) 1024

10) Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é:

a) -1
b) 4
c) 9
d) 14
e) 19

11) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.

A medida da altura desse tronco de cone é

Desenho fora de escala

a) 13 cm
b) 12 cm
c) 11 cm
d) 10 cm
e) 9 cm

12) Se forem tomadas ao acaso duas arestas de um prisma reto de bases triangulares, a probabilidade de que elas estejam em retas-suporte reversas é

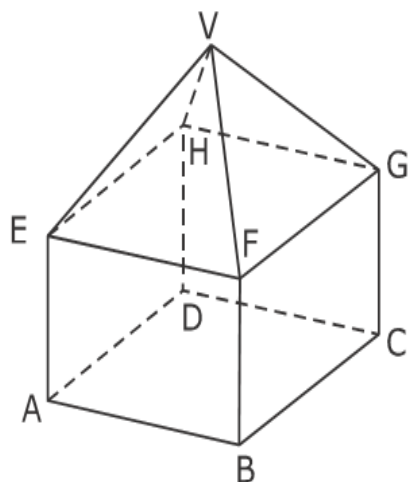
a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2}$

13) Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtidos a partir de um cubo e uma pirâmide. Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida ℓ, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $\ell\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+4\right)$

b) $\ell\left(\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

c) $\ell\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $\ell\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

e) $\ell\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

14) Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma abcdef-xy, em que a sequência (abcdef) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}(a-b)\\ (c-d)\\ (e-f)\end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A\cdot B=C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são

a) 34
b) 41
c) 49
d) 51
e) 54

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2015/2016

1) b (Logaritmo)
2) d (Probabilidade)
3) b (Sistemas lineares)
4) a (Polinômios)
5) e (Função composta)
6) a (Números complexos)
7) e (Polinômios)
8) c (Geometria analítica cônicas)
9) e (Geometria espacial métrica)
10) c (Fatorial)
11) a (Geometria analítica circunferência)
12) c (Progressões)
13) e (Análise combinatória)
14) b (Geometria espacial métrica)
15) d (Função)
16) e (Equação polinomial)
17) c (Função modular)
18) c (Função quadrática)
19) d (Geometria analítica circunferência)
20) b (Progressão geométrica)

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2014/2015

1) d (Probabilidade)
2) d (Equação modular)
3) a (Função trigonométrica)
4) a (Função quadrática)
5) b (Binômio de Newton)
6) d (Geometria espacial – cone)
7) e (Análise combinatória)
8) b (Inequação exponencial e logaritmos)
9) c (Polinômios)
10) c (Função – domínio)
11) e (Função – classificação)
12) b (Inequação polinomial)
13) b (Função inversa)
14) c (Matrizes e determinantes)
15) a (Geometria analítica – reta)
16) b (Números complexos – lugar geométrico)
17) c (Trigonometria – redução ao 1° quadrante)

18) d (Trigonometria – equação trigonométrica)
19) e (Geometria analítica – parábola)
20) b (Progressão Geométrica)

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2013/2014

1) d (Função)
2) a (Trigonometria)
3) d (Geometria plana – áreas)
4) c (Probabilidade)
5) d (Função quadrática)
6) b (Conjuntos)
7) e (Geometria analítica – cônicas)
8) a (Geometria espacial – esfera)
9) d (Logaritmo)
10) c (Polinômios)
11) a (Função exponencial e logaritmo)
12) e (Geometria plana – áreas)
13) a (Matrizes)
14) e (Números complexos)
15) b (Geometria espacial – prisma)
16) c (Inequação modular)
17) b (Geometria analítica – circunferência)
18) a (Números complexos)
19) e (Progressões)
20) c (Polinômios)

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2012/2013

1) a (Geometria analítica – circunferência)
2) a (Geometria espacial – cone)
3) b (Probabilidade)
4) e (Números complexos)
5) e (Logaritmos)
6) e (Geometria espacial – posição)
7) c (Polinômios)
8) d (Progressões)
9) c (Função do 1º grau)
10) d (Números complexos)
11) b (Polinômios)
12) a (Geometria Espacial – posição)
13) c (Matrizes)
14) c (Função e números complexos)
15) a (Progressões)
16) b (Função)
17) b (Equação exponencial)
18) b (Trigonometria)

19) d (Trigonometria)
20) a (Função – domínio)

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2011/2012

1) e (Função)
2) c (Números complexos)
3) e (Função)
4) d (Relação)
5) b (Logaritmo)
6) e (Equação exponencial)
7) b (Função exponencial)
8) d (Função composta)
9) d (Inequação exponencial)
10) d (Trigonometria)
11) d (Trigonometria – redução ao 1º quadrante)
12) a (Função trigonométrica)
13) c (Progressões e trigonometria no triângulos retângulo)
14) a (Sistemas lineares)
15) b (Análise combinatória)
16) a (Progressões e logaritmo)
17) e (Probabilidade)
18) d (Geometria espacial de posição)
19) a (Geometria espacial de posição)
20) c (Geometria espacial métrica)
21) b (Geometria espacial métrica)
22) a (Geometria espacial métrica)
23) b (Função logaritmo)
24) c (Geometria analítica – circunferência)
25) c (Polinômios)
26) a (Geometria analítica – reta)
27) e (Geometria analítica – cônicas)
28) e (Geometria analítica – cônicas)
29) b (Equações polinomiais)
30) a (Equações polinomiais)

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx 2010/2011

1) d (Função)
2) c (Função quadrática)
3) c (Função exponencial)
4) e (Logaritmo)
5) a (Logaritmo)
6) a (Função modular)
7) d (Progressões)
8) c (Análise combinatória)
9) c (Progressões)

10) d (Sistemas lineares)
11) b (Geometria espacial métrica – cone)
12) a (Probabilidade)
13) b (Geometria espacial métrica)
14) e (Sistemas lineares)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 2011 A 2016

	2016	2015	2014	2013	2012	2011	TOTAL	PERCENTUAL
Conjuntos			1				1	0,8%
Progressões	2	1	1	2	2	2	10	8,1%
Trigonometria		3	1	2	3		9	7,3%
Números complexos	1	1	2	2	1		7	5,6%
Polinômios	3	2	2	2	3		12	9,7%
Relação e função	2	3	1	3	4	1	14	11,3%
Função do 1º grau				1			1	0,8%
Função quadrática	1	1	1			1	4	3,2%
Função exponencial		1	1	1	3	1	7	5,6%
Logaritmo	1		1	1	2	2	7	5,6%
Função modular	1	1	1			1	4	3,2%
Matrizes e determinantes		1	1	1			3	2,4%
Sistemas lineares	1				1	2	4	3,2%
Análise combinatória	1	1			1	1	4	3,2%
Fatorial e Binômio de Newton	1	1					2	1,6%
Probabilidade	1	1	1	1	1	1	6	4,8%
Geometria plana - áreas			2				2	1,6%
Geometria analítica - reta		1			1		2	1,6%
Geometria analítica - circunferência	2		1	1	1		5	4,0%
Geometria analítica - cônicas	1	1	1		2		5	4,0%
Geometria espacial - posição				2	2		4	3,2%
Geometria espacial - métrica	2	1	2	1	3	2	11	8,9%
TOTAL POR PROVA	**20**	**20**	**20**	**20**	**30**	**14**	**124**	**100%**

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2015/2016

1) Fazendo $x=\ln 5$ temos que $y=e^x-e^{-x}=\frac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$ e $b\in\mathbb{Z}^*$, a e b primos entre si. Logo $a+b$ é igual a

a) 28
b) 29
c) 40
d) 51
e) 52

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$x=\ln 5\Rightarrow e^x=e^{\ln 5}=5$

$e^{-x}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{5}$

$y=e^x-e^{-x}=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$

Como $\text{mdc}(24,5)=1$, então $a=24$ e $b=5$, o que implica $a+b=24+5=29$.

NOTA: Sejam $0<a\neq 1$ e $b>0$, então $a^{\log_a b}=b$.
Demonstração: $\log_a b=x\Leftrightarrow a^x=b\Leftrightarrow a^{\log_a b}=b$.

2) Considere as equações de nove retas distintas do plano cartesiano:

$r_1: y=3x-2$ $\quad r_2: 3x+y+1=0$ $\quad r_3: -x-3y-1=0$

$r_4: y=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$ $\quad r_5: 3x+9y+2=0$ $\quad r_6: y=-3x+7$

$r_7: 6x+2y+4=0$ $\quad r_8: -3x-y-9=0$ $\quad r_9: \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

Sorteando aleatoriamente e sem reposição duas retas dessa lista, a probabilidade de obter duas retas cuja interseção é um conjunto não vazio é

a) 0,15
b) 0,25
c) 0,50
d) 0,75
e) 0,85

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma foi anulada da forma originalmente proposta)**

$r_1 : y = 3x - 2$

$r_2 : 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 1$

$r_3 : -x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

$r_4 : y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$r_5 : 3x + 9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9}$

$r_6 : y = -3x + 7$

$r_7 : 6x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 2$

$r_8 : -3x - y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = -3x - 9$

$r_9 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2$

As retas r_2, r_6, r_7 e r_8 são retas paralelas distintas.

As retas r_3, r_4 e r_5 são paralelas distintas.

O número de maneiras de escolher duas retas dentre as nove é $\#(\Omega) = C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$.

Seja A o evento escolher duas retas cuja interseção é o conjunto não vazio. Vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento $\overline{A}$, que é a probabilidade de escolher duas retas cuja interseção é o conjunto vazio.

O número de pares de retas cuja interseção é igual ao conjunto vazio é $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ (número de maneiras de escolher duas retas dentre as paralelas distintas r_2, r_6, r_7 e r_8) mais $C_3^2 = 3$ (número de maneiras de escolher duas retas dentre as paralelas distintas r_3, r_4 e r_5), ou seja, $\#(\overline{A}) = 6 + 3 = 9$.

Assim, $P(\overline{A}) = \frac{\#(\overline{A})}{\#(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ e a probabilidade pedida é $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

3) Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é igual a

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se o sistema é possível e indeterminado, então ele não é de Cramer, ou seja, o determinante da sua matriz incompleta é nulo. Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6+2+5a-4a-5+3=0 \Leftrightarrow a=6.$$

Vamos agora substituir o valor de a no sistema e escaloná-lo.

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=b \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{cases} x+y+6z=1 \\ y-5z=1 \\ 3y-15z=b-2 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{cases} x+y+6z=1 \\ y-5z=1 \\ 0=b-5 \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível e indeterminado a terceira equação do sistema escalonado deve ser da forma $0=0$, ou seja, $b-5=0 \Leftrightarrow b=5$.
Portanto, $a+b=6+5=11$.

4) Considere os polinômios $p(x)=x^{80}+3x^{79}-x^2-x-1$ e $b(x)=x^2+2x-3$. Sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $b(x)$, o valor de $r\left(\frac{1}{2}\right)$ é igual a

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) 2
e) $\frac{5}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como o divisor $b(x)=x^2+2x-3$ é de grau 2, então o resto $r(x)$ é no máximo de grau 1.
Assim, $r(x)$ pode ser escrito na forma $r(x)=ax+b$.
Seja $q(x)$ o quociente da divisão, temos:

$$p(x)=b(x)\cdot q(x)+r(x) \Rightarrow x^{80}+3x^{79}-x^2-x-1=\left(x^2+2x-3\right)\cdot q(x)+(ax+b)$$

Fazendo $x=1$, temos:

$$1^{80}+3\cdot 1^{79}-1^2-1-1=\left(1^2+2\cdot 1-3\right)\cdot q(1)+(a\cdot 1+b) \Leftrightarrow 1=a+b$$

Fazendo $x=-3$, temos:

$$(-3)^{80}+3\cdot(-3)^{79}-(-3)^2-(-3)-1=\left((-3)^2+2\cdot(-3)-3\right)\cdot q(-3)+\left(a\cdot(-3)+b\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^{80}-3^{80}-9+3-1=-3a+b \Leftrightarrow -7=-3a+b$$

Resolvendo o sistema linear $\begin{cases} a+b=1 \\ -3a+b=-7 \end{cases}$, temos:

$$(a+b)-(-3a+b)=1-(-7) \Leftrightarrow 4a=8 \Leftrightarrow a=2$$

$a+b=1 \Rightarrow 2+b=1 \Leftrightarrow b=-1$

Portanto, $r(x)=2x-1$ e $r\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$.

5) Considere as funções reais f e g, tais que $f(x)=\sqrt{x}+4$ e $f(g(x))=x^2-5$, onde $g(x)$ é não negativa para todo x real. Assinale a alternativa cujo conjunto contém todos os possíveis valores de x, que satisfazem os dados do enunciado.

a) $\mathbb{R}-]-3,3[$

b) $\mathbb{R}-]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$

c) $]-\sqrt{5},\sqrt{5}[$

d) $]-3,3[$

e) $\mathbb{R}-]-\infty,3[$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Inicialmente, observemos que o domínio de $f(x)=\sqrt{x}+4$ é $D_f=\mathbb{R}_+$.

Analisando a função composta, temos:

$f(g(x))=x^2-5 \Leftrightarrow \sqrt{g(x)}+4=x^2-5 \Leftrightarrow \sqrt{g(x)}=x^2-9$

Como $g(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, então $\sqrt{g(x)}$ está sempre definida.

Entretanto, para que a identidade $f(g(x))=x^2-5$ seja satisfeita, é necessário que $x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3 \vee x\geq 3$.

Portanto, o domínio de validade da função composta é $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-]-3,3[$.

Dessa forma, o conjunto que contém todos os possíveis valores de x, que satisfazem os dados do enunciado é $D_f \cap D_{f\circ g}=\mathbb{R}-]-\infty,3[$.

6) Se $(1+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)=x+iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $\sqrt{3}\cdot x+y$ é

a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $3\sqrt{6}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

$x+iy = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cdot x+y = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

7) Considere o polinômio $p(x) = x^6-2x^5+2x^4-4x^3+x^2-2x$. Sobre as raízes de $p(x)=0$, podemos afirmar que

a) quatro raízes são reais distintas.
b) quatro raízes são reais, sendo duas iguais.
c) apenas uma é real.
d) apenas duas raízes são reais e iguais.
e) apenas duas raízes são reais distintas.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$p(x) = x^6-2x^5+2x^4-4x^3+x^2-2x = x\cdot\left(x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2\right) =$

$= x\cdot\left[x^4(x-2)+2x^2(x-2)+1\cdot(x-2)\right] = x(x-2)\left(x^4+2x^2+1\right) = x(x-2)\left(x^2+1\right)^2$

Como x^2+1 se anula para $\pm i$, então o polinômio $p(x)$ possui raízes 0, 2, i (dupla) e $-i$ (dupla).
Logo, há apenas duas raízes reais distintas.

8) Considere as afirmações:

I – Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

II – Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0)$ e $F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2-9y^2=576$.

III – A parábola $8x=-y^2+6y-9$ tem como vértice o ponto $V(3,0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas.

b) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

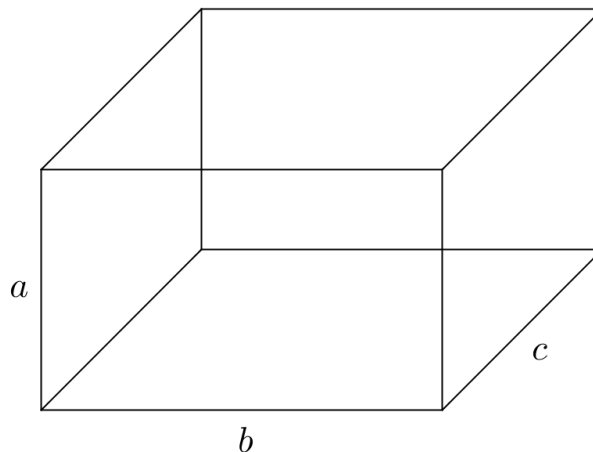
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
I – Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. (VERDADEIRA)
Se os focos da elipse são $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, então o eixo maior está sobre o eixo Ox e $c=3$.
Se a medida do eixo maior é 8, então $2a=8 \Leftrightarrow a=4$.
Na elipse vale a relação $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow 4^2=b^2+3^2 \Leftrightarrow b^2=7$.
A equação da elipse com focos sobre Ox é dada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.
II – Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0)$ e $F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2-9y^2=576$. (VERDADEIRA)
Se os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0)$ e $F_2(10,0)$, então o eixo real está sobre o eixo Ox e $c=10$.
Se a excentricidade é $\frac{5}{3}$, então $\frac{c}{a}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{a}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow a=6$.
Na hipérbole vale a relação $c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 10^2=6^2+b^2 \Leftrightarrow b^2=64 \Leftrightarrow b=8$.
A equação da hipérbole com focos sobre Ox é $\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1 \Leftrightarrow 16x^2-9y^2=576$.
III – A parábola $8x=-y^2+6y-9$ tem como vértice o ponto $V(3,0)$. (FALSA)
$8x=-y^2+6y-9 \Leftrightarrow y^2-6y+9=-8x \Leftrightarrow (y-3)^2=-8x$
A equação acima representa uma parábola com eixo de simetria horizontal voltada para a esquerda, vértice $V(0,3)$ e parâmetro $2p=8 \Leftrightarrow p=4$.

9) As medidas as arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5 e a soma dessas medidas é igual a 48 cm. Então a medida da sua área total, em cm^2, é
a) 752
b) 820
c) 1024
d) 1302
e) 1504

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Sejam a, b e c as arestas do paralelepípedo retângulo, conforme figura a seguir, então temos:

$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{3+4+5}=\frac{48}{12}=4 \Leftrightarrow a=12,\ b=16\ \text{e}\ c=20$

Assim, a sua área total é dada por $S_T=2\cdot(ab+ac+bc)=2\cdot(12\cdot16+12\cdot20+16\cdot20)=1504\ \text{cm}^2$.

10) A solução da equação $\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!}=\frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\frac{3!(x-1)!}{4(x-3)!}=\frac{182(x-2)!-x!}{2(x-2)!} \Leftrightarrow \frac{3!(x-1)(x-2)(x-3)!}{4(x-3)!}=\frac{182(x-2)!-x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-1)(x-2)}{4}=\frac{(x-2)![182-x(x-1)]}{2(x-2)!} \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x-2)}{2}=\frac{182-x(x-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-3x+2)=182-x^2+x \Leftrightarrow 2x^2-5x-88=0 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{2} \vee x=8$$

Como $x\in\mathbb{N}$, então $x=8$, que é um cubo perfeito.

11) Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(4,0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3,-2)$, tem por equação

a) $3x-2y-13=0$

b) $2x-3y-12=0$
c) $2x-y-8=0$
d) $x-5y-13=0$
e) $8x+3y-18=0$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Se os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ estão sobre a circunferência e pertencem a uma reta que passa pelo seu centro, então o ponto médio deles é o centro da circunferência e a distância entre eles o diâmetro. Assim, o centro da circunferência é $\left(\frac{0+4}{2},\frac{6+0}{2}\right)=(2,3)$ e o diâmetro é $2R=\sqrt{(0-4)^2+(6-0)^2}=2\sqrt{13}\Leftrightarrow R=\sqrt{13}$.
Logo, a equação dessa circunferência é $(x-2)^2+(y-3)^2=13$.
A distância do ponto $(3,-2)$ ao centro da circunferência é $\sqrt{(3-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}>\sqrt{13}=R$, logo esse ponto é exterior à circunferência.
Uma reta que passa pelo ponto $(3,-2)$ pode ser escrita na forma $y-(-2)=m(x-3)\Leftrightarrow mx-y-(3m+2)=0$.
Para que a reta seja tangente à circunferência, a distância do centro da circunferência a essa reta deve ser igual ao raio. Assim, temos:

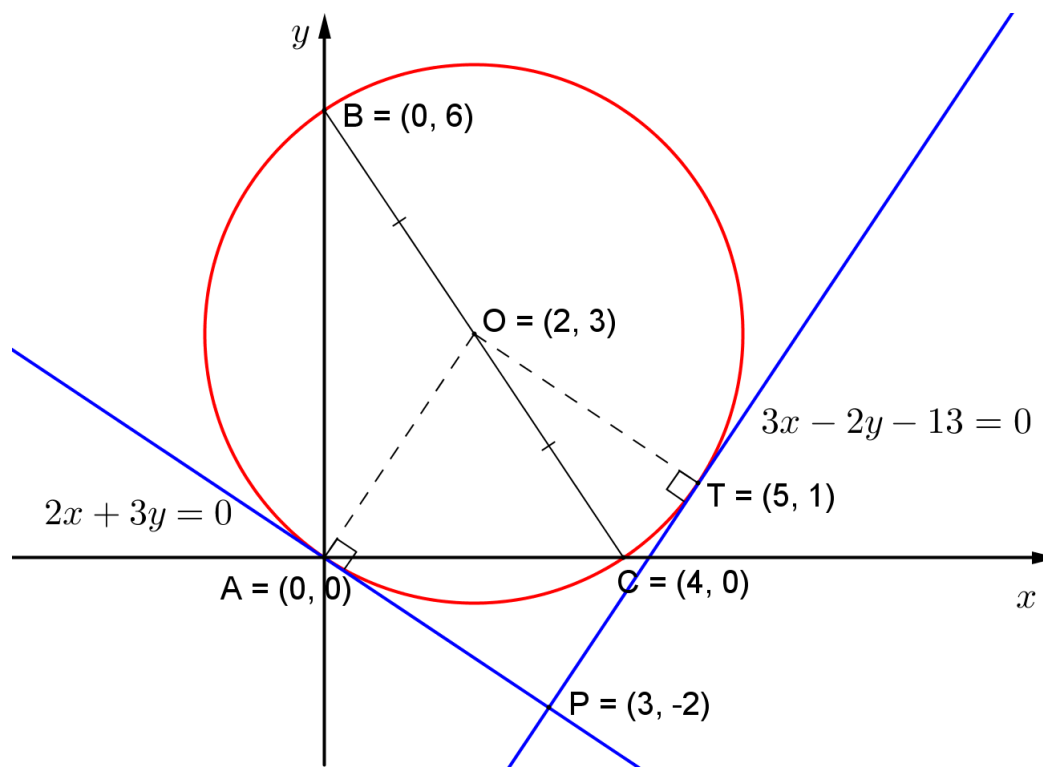
$$\frac{|m\cdot 2-3-(3m+2)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}\Leftrightarrow|-m-5|=\sqrt{13(m^2+1)}\Leftrightarrow m^2+10m+25=13m^2+13$$

$$\Leftrightarrow 6m^2-5m-6=0\Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}\ \vee\ m=\frac{3}{2}$$

As possíveis equações das retas são:

$$-\frac{2}{3}x-y-\left(3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\right)=0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}x-y=0$$

$$\frac{3}{2}x-y-\left(3\cdot\frac{3}{2}+2\right)=0\Leftrightarrow 3x-2y-13=0$$

A segunda equação aparece na alternativa (a).
A figura a seguir ilustra a situação descrita nesse problema.

12) João e Maria iniciam juntos uma corrida, partindo de um mesmo ponto. João corre uniformemente 8 km por hora e Maria corre 6 km na primeira hora e acelera o passo de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km cada hora que se segue. Assinale a alternativa correspondente ao número de horas corridas para que Maria alcance João.

a) 3
b) 5
c) 9
d) 10
e) 11

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Após t horas, João percorreu $j(t) = 8 \cdot t$ km.
A distância percorrida por Maria a cada hora é uma progressão aritmética de primeiro termo 6 e razão $\frac{1}{2}$. A distância percorrida por Maria após t horas é igual à soma dos t primeiros termos dessa PA, ou seja, $m(t) = \frac{\left(2 \cdot 6 + \frac{1}{2}(t-1)\right) \cdot t}{2} = \frac{(23+t) \cdot t}{4}$

Como a velocidade inicial de João é maior, ele sai a frente de Maria. Maria alcançará João quando as distâncias percorridas por ambos forem iguais. Assim, temos:

$j(t) = m(t) \Leftrightarrow 8t = \frac{(23+t) \cdot t}{4} \Leftrightarrow t^2 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \ \vee \ t = 9$.

Isso significa que as distâncias percorridas por ambos são iguais no início e após 9 horas.

13) Da análise combinatória, pode-se afirmar que
a) o número de múltiplos inteiros e positivos de 11, formados por três algarismos, é igual a 80.
b) a quantidade de números ímpares de quatro algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5 e 6 é igual a 24.
c) o número de anagramas da palavra ESPCEX que têm as vogais juntas é igual a 60.
d) no cinema, um casal vai sentar-se em uma fileira com dez cadeiras, todas vazias. O número de maneiras que poderão sentar-se em duas cadeiras vizinhas é igual a 90.
e) a quantidade de funções injetoras definidas em $A=\{1,3,5\}$ com valores em $B=\{2,4,6,8\}$ é igual a 24.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
a) O menor múltiplo de 11 de 3 algarismos é $110=11\cdot 10$ e o maior é $990=11\cdot 90$. Logo, o número de múltiplos de 11 de três algarismos é $90-10+1=81$. (INCORRETA)
b) O número de possibilidades para o algarismo das unidades simples é 2 e o número de possibilidades para o número formado pelos outros 3 algarismos é $4\cdot 3\cdot 2=24$.Logo, a quantidade de números com as características pedidas é $2\cdot 24=48$. (INCORRETA)
c) Considerando os dois E´s juntos, o número de anagramas é a permutação de 5 elementos, ou seja, $5!=120$. (INCORRETA)
d) Vamos inicialmente escolher duas cadeiras vizinhas. Vamos sempre escolher uma cadeira e a cadeira à sua direita. Assim, o número de maneiras de escolher duas cadeiras vizinhas é 9 (não podemos escolher a 10ª). Para cada escolha das cadeiras, o casal pode sentar-se de duas maneiras distintas. Assim, o total de maneiras é $9\cdot 2=18$. (INCORRETA)
e) Em uma função injetora, cada elemento do contradomínio pode estar associado a no máximo um elemento do domínio. Assim, temos 4 possibilidades para a imagem de 1, 3 possibilidades para a imagem de 3 e 2 possibilidades para a imagem de 5. Logo, a quantidade de funções injetoras é $4\cdot 3\cdot 2=24$. (CORRETA)

14) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$

b) $\frac{3}{4}R$

c) $\frac{4}{9}R$

d) $\frac{1}{3}R$

e) $\frac{9}{16}R$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O volume correspondente ao aumento do nível da água no cilindro é igual ao volume da esfera.
Seja x o raio da esfera, então

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 = \pi R^2 \cdot \frac{9}{16}R \Leftrightarrow x^3 = \frac{27}{64}R^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}R$$

15) Considere a função real definida por $f(x) = \begin{cases} 2-|x-3|, & \text{se } x > 2 \\ -x^2+2x+1, & \text{se } x \le 2 \end{cases}$, o valor de $f(0)+f(4)$ é

a) -8
b) 0
c) 1
d) 2
e) 4

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$0 \le 2 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$4 > 2 \Rightarrow f(4) = 2 - |4-3| = 2 - |1| = 1$$

$$\Rightarrow f(0) + f(4) = 1 + 1 = 2$$

16) Sendo R a maior das raízes da equação $\frac{11x+6}{x-4} = x^2$, então o valor de $2R-2$ é

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Condição de existência: $x \neq 4$

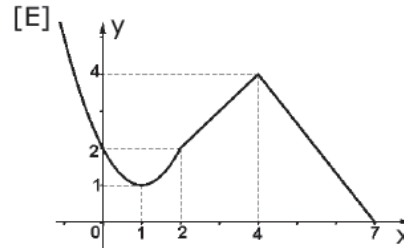
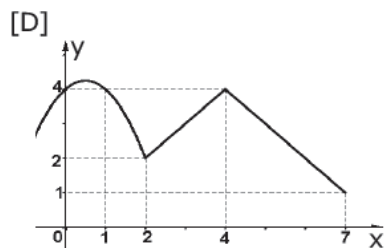
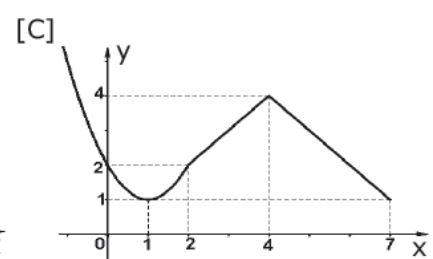
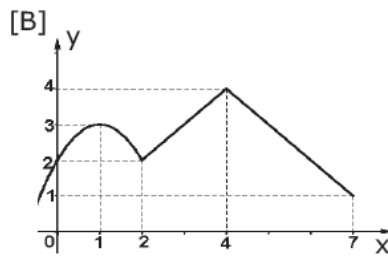
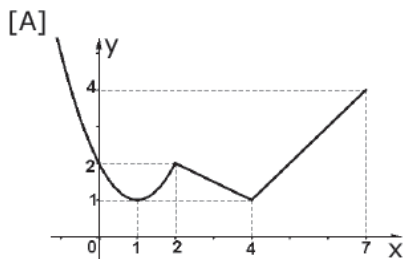
$$\frac{11x+6}{x-4} = x^2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$$

Pelo teorema das raízes racionais, as possíveis raízes dessa equação são $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
Observe ainda que, por se tratar de uma equação de grau ímpar, ela possui pelo menos uma raiz real.
Testando as possibilidades, começando pelas mais simples, observamos que -1 é raiz.

Podemos então fatorar a equação utilizando o algoritmo de Briott-Rufini.

	1	–4	–11	–6
–1	1	–5	–6	0

Assim, a equação pode ser reescrita na forma: $(x+1)(x^2-5x-6)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-6)=0$.
Portanto, tem uma raiz dupla igual a -1 e uma raiz simples igual a 6.
Logo, $R=6$ e $2R-2=2\cdot 6-2=10$.

17) O gráfico que melhor representa a função real definida por $\begin{cases} 4-|x-4|, \text{ se } 2<x\le 7 \\ x^2-2x+2, \text{ se } x\le 2 \end{cases}$ é

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$f(x)=\begin{cases} 4-|x-4|, \text{ se } 2<x\le 7 \\ x^2-2x+2, \text{ se } x\le 2 \end{cases}$$

$x\le 2 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+2$

O gráfico dessa parte da função é uma parábola com concavidade para cima, vértice $x_V=\frac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$ e $y_v=1^2-2\cdot 1+2=1$, e termina em $f(2)=2^2-2\cdot 2+2=2$.

$2<x<4 \Rightarrow x-4<0 \Rightarrow |x-4|=-x+4 \Rightarrow f(x)=4-(-x+4)=x$

O gráfico dessa parte da função é uma reta crescente entre os pontos $(2,2)$ e $(4,4)$.

$4\le x\le 7 \Rightarrow x-4\ge 0 \Rightarrow |x-4|=x-4 \Rightarrow f(x)=4-(x-4)=-x+8$

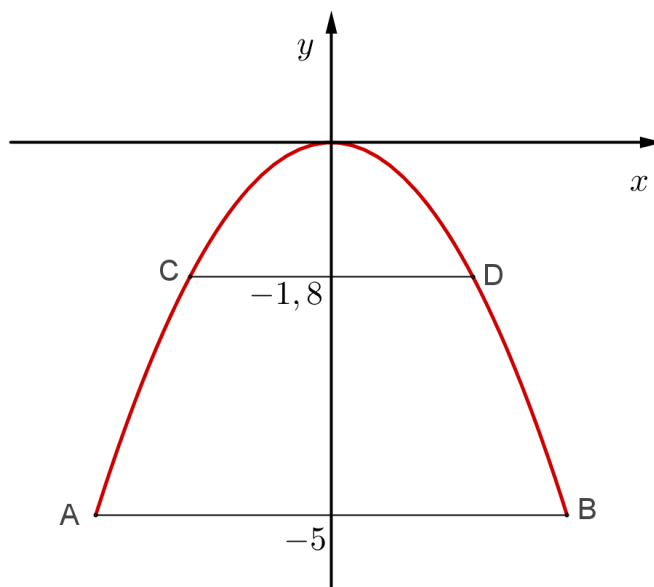
O gráfico dessa parte da função é uma reta decrescente entre os pontos $(4,4)$ e $(7,1)$.

Portanto, a alternativa correta é (c).

18) Um portal de igreja tem a forma de um arco de parábola, conforme figura abaixo. A medida da sua base AB é 4 m e da sua altura é 5 m. Um vitral foi colocado 3,2 m acima da base. Qual a medida CD da base, em metros?

a) 1,44
b) 1,80
c) 2,40
d) 3,00
e) 3,10

RESPOSTA: c

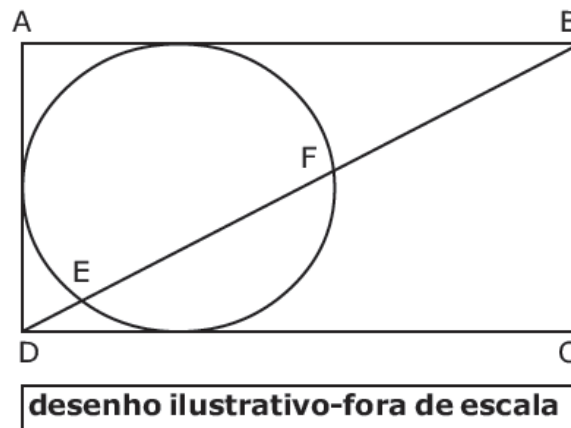
RESOLUÇÃO:

Definindo um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e cujo eixo Oy coincide com o eixo de simetria da parábola, a função quadrática cujo gráfico é o arco de parábola pode ser representada por $f(x) = ax^2$, onde $a < 0$.

Se $AB = 4$, então $x_A = -2$, $x_B = 2$ e $f(2) = a \cdot 2^2 = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$.

Mas sabemos que $f(x_D) = -\frac{5}{4} \cdot x_D^2 = -1,8 \Leftrightarrow x_D^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \Leftrightarrow x_D = \frac{6}{5}$.

Assim, $CD = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} = 2,4\ \text{m}$.

19) Na figura abaixo, a circunferência de raio 3 cm tangencia três lados do retângulo ABCD. Sabendo que a área deste retângulo é igual a $72\ \text{cm}^2$, a medida do segmento EF, em cm, é igual a:

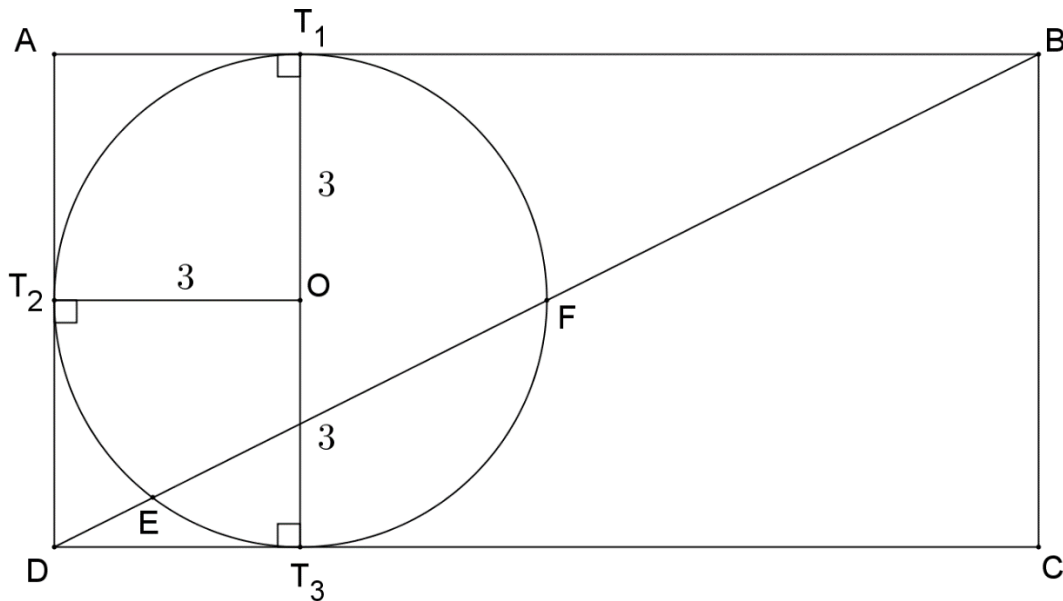
a) $3\sqrt{5}$

b) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

c) $6\sqrt{5}$

d) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

e) $12\sqrt{5}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$AD = T_1T_3 = OT_1 + OT_3 = 3 + 3 = 6$

$S_{ABCD} = AD \cdot CD = 72 \Leftrightarrow 6 \cdot CD = 72 \Leftrightarrow CD = 12$

Seja uma sistema cartesiano ortogonal sobre os lados do retângulo e com origem em D.

A reta BD tem é dada por $y = \frac{6}{12} x \Leftrightarrow x = 2y$.

A equação da circunferência de centro $O(3,3)$ e raio 3 é $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

A interseção da reta com a circunferência é dada por:

$$(2y-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Leftrightarrow 5y^2 - 18y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \ \vee \ y = \frac{3}{5}$$

Assim, os pontos de interseção são $E\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ e $F(6,3)$.

Logo, a medida do segmento é $EF = \sqrt{\left(6 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24^2 + 12^2}{25}} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 5}{25}} = \frac{12}{5}\sqrt{5}$.

Vamos resolver esse problema usando somente Geometria Plana, considerando a potência dos pontos B e D em relação à circunferência.

$(BF + EF) \cdot BF = BT_1^2 = 9^2 = 81$ (i)

$(DE + EF) \cdot DE = DT_3^2 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow DE + EF = \frac{9}{DE}$ (ii)

$DE + EF + BF = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow BF = 6\sqrt{5} - DE - EF$ (iii)

Substituindo (iii) em (i), temos: $(6\sqrt{5} - DE)(6\sqrt{5} - DE - EF) = 81$ (iv)

Substituindo (ii) em (iv), temos:

$$\left(6\sqrt{5}-\text{DE}\right)\left(6\sqrt{5}-\frac{9}{\text{DE}}\right)=81 \Leftrightarrow \left(6\sqrt{5}-\text{DE}\right)\left(6\sqrt{5}\text{DE}-9\right)=81\text{DE}$$

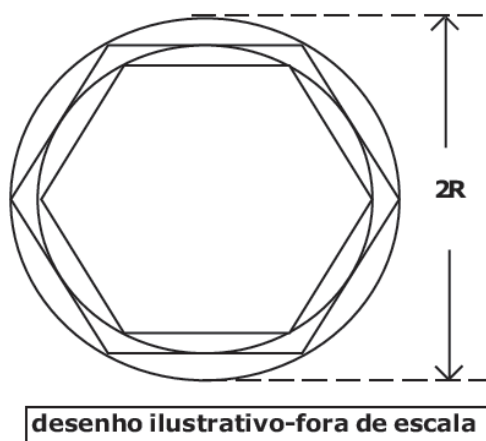
$$\Leftrightarrow 180\text{DE}-54\sqrt{5}-6\sqrt{5}\text{DE}^2+9\text{DE}=81\text{DE} \Leftrightarrow \sqrt{5}\text{DE}^2-18\text{DE}+9\sqrt{5}=0$$

$$\Leftrightarrow \text{DE}=3\sqrt{5} \text{ (não convém) ou DE}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\text{EF}=\frac{9}{\text{DE}}-\text{DE}=\frac{9}{\frac{3}{\sqrt{5}}}-\frac{3}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Observe que o valor descartado para DE é na verdade o valor de DF.

20) Considere o seguinte procedimento: em uma circunferência de diâmetro 2R, inscreve-se um hexágono regular para, em seguida, inscrever neste polígono uma segunda circunferência. Tomando esta nova circunferência, o processo é repetido gerando uma terceira circunferência. Caso esse procedimento seja repetido infinitas vezes, a soma dos raios de todas as circunferências envolvidas nesse processo é igual a:

desenho ilustrativo-fora de escala

a) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d) $R\left(2+\sqrt{3}\right)$

e) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

O hexágono inscrito em uma circunferência de raio $r_1 = R$ tem lado $L_1 = R$. A circunferência inscrita nesse hexágono tem raio $r_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. O hexágono inscrito nessa circunferência tem lado $L_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a razão entre os raios de duas circunferência consecutivas é $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, as medidas dos raios formam uma progressão geométrica infinita decrescente de primeiro termo $r_1 = R$ e razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, a soma dos raios de todas as circunferências é $S = \frac{R}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R}{2 - \sqrt{3}} = 2R\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2014/2015

1) De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. A probabilidade do número da primeira bola ser divisível por 4 e o número da segunda bola ser divisível por 5 é

a) $\frac{12}{245}$

b) $\frac{14}{245}$

c) $\frac{59}{2450}$

d) $\frac{59}{1225}$

e) $\frac{11}{545}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Para analisar a probabilidade do número da primeira bola ser divisível por 4 e do número da segunda bola ser divisível por 5, temos que considerar dois casos:

1°) O número da primeira bola é um múltiplo de 4 e não é múltiplo de 5.

Os valores possíveis para a primeira bola são $A=\{4,8,12,16,24,28,32,36,44,48\}$ e $\#(A)=10$. A probabilidade de isso acontecer na primeira bola retirada é $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{10}{50}$.

Nas 49 bolas restantes há $\#(B)=10$ com número múltiplo de 5. A probabilidade de a segunda bola retirada ter um número múltiplo de 5 é $P(B)=\frac{\#(B)}{\#(\Omega)}=\frac{10}{49}$.

Assim, a probabilidade de a primeira bola ter um número múltiplo de 4 e não é múltiplo de 5, e de a segunda bola ter um número múltiplo de 5 é $P_1=P(A)\cdot P(B)=\frac{10}{50}\cdot\frac{10}{49}=\frac{100}{2450}$.

2°) O número da primeira bola é um múltiplo de 4 e de 5.

Os valores possíveis para a primeira bola são $A=\{20,40\}$ e $\#(A)=2$. A probabilidade de isso acontecer na primeira bola retirada é $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{2}{50}$.

Nas 49 bolas restantes há $\#(B)=10-1=9$ com número múltiplo de 5. A probabilidade de a segunda bola retirada ter um número múltiplo de 5 é $P(B)=\frac{\#(B)}{\#(\Omega)}=\frac{9}{49}$.

Assim, a probabilidade de a primeira bola ter um número múltiplo de 4 e de 5, e de a segunda bola ter um número múltiplo de 5 é $P_2=P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{50}\cdot\frac{9}{49}=\frac{18}{2450}$.

Portanto, a probabilidade do número da primeira bola ser divisível por 4 e o número da segunda bola ser divisível por 5 é $P=P_1+P_2=\frac{100}{2450}+\frac{18}{2450}=\frac{118}{2450}=\frac{59}{1225}$.

2) O número de soluções da equação $\frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|x-3|=2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
$\frac{1}{2}\cdot|x|\cdot|x-3|=2\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right| \Leftrightarrow |x\cdot(x-3)|=|4x-6| \Leftrightarrow x^2-3x=\pm(4x-6)$

1°) $x^2-3x=4x-6 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=6$

2°) $x^2-3x=-4x+6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=2$

Logo, $S=\{-3,1,2,6\}$ e o número de soluções é 4.

3) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a seis meses do ano.
b) a população atinge seu máximo em $t=6$.
c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
d) a população média anual é de 6.000 animais.
e) a população atinde seu mínimo em $t=4$ com 6.000 animais.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(A redação da opção a) foi alterada para dar mais precisão ao enunciado)**
Restringindo o período de análise a um ano, t deve ser um número natural de 0 a 12.

A função $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ tem período $T=\frac{2\pi}{\pi/6}=12$.

A função é simétrica em relação à reta $y=5\cdot10^3$. Assim, a população média anual é de 5.000 animais.
A função cresce de $t=0$ a $t=2$, decresce de $t=2$ a $t=8$ e cresce de $t=8$ a $t=12$. Assim, o período chuvoso ocorre nos dois primeiros e nos quatro últimos meses do ano. De forma, que temos 6 meses chuvosos e 6 meses de seca.
A população atinge seu máximo quando

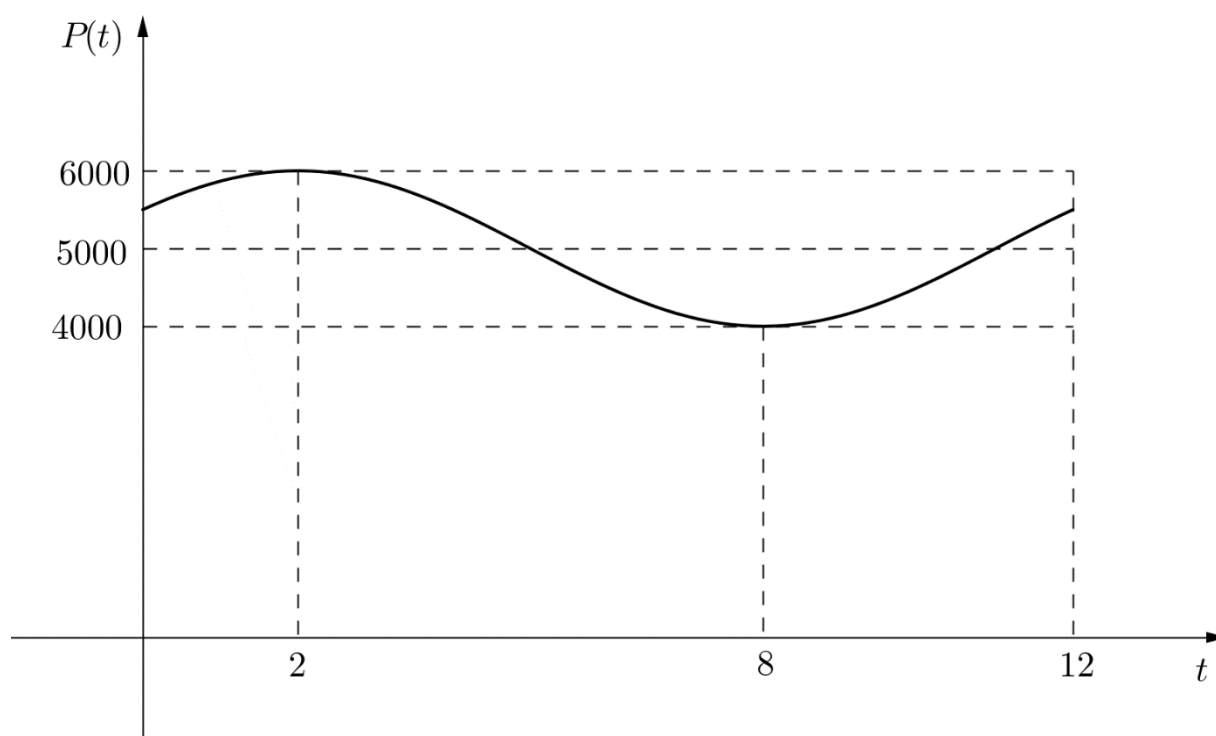
$$\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{t-2}{6}\right)\pi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=12k+2,\ k\in\mathbb{Z} \overset{0\le t\le 12}{\Rightarrow} t=2$$

$$P(2)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{2-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)=6.000$$

A população atinge seu mínimo quando

$$\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{t-2}{6}\right)\pi=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=12k+8,\ k\in\mathbb{Z} \overset{0\le t\le 12}{\Rightarrow} t=8$$

$$P(8)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{8-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)=4.000$$

A seguir encontra-se o gráfico de $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$, para $0\le t\le 12$, onde é possível identificar o que foi calculado acima.

4) Um fabricante de poltronas pode produzir cada peça ao custo de R\$ 300,00. Se cada uma for vendida por x reais, este fabricante venderá por mês $(600-x)$ unidades, em que $0\le x\le 600$. Assinale a alternativa que representa o número de unidades vendidas mensalmente que corresponde ao lucro máximo.

a) 150
b) 250
c) 350
d) 450
e) 550

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Vendendo as poltronas por x reais são vendidas $(600-x)$ unidades, então a receita é $R(x)=x\cdot(600-x)$ e o custo $C(x)=300\cdot(600-x)$. Assim, o lucro é dado por:
$L(x)=(600-x)\cdot x-300\cdot(600-x)=-x^2+900x-180000$
O lucro é representado por um trinômio do $2°$ grau com coeficiente líder negativo, logo esse trinômio tem concavidade para baixo e possui um ponto de máximo.
O lucro máximo ocorre no vértice do trinômio do $2°$ grau, ou seja, para $x=\frac{-900}{2\cdot(-1)}=450$.
Portanto, o número de unidades vendidas deve ser $600-x=600-450=150$.

5) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a

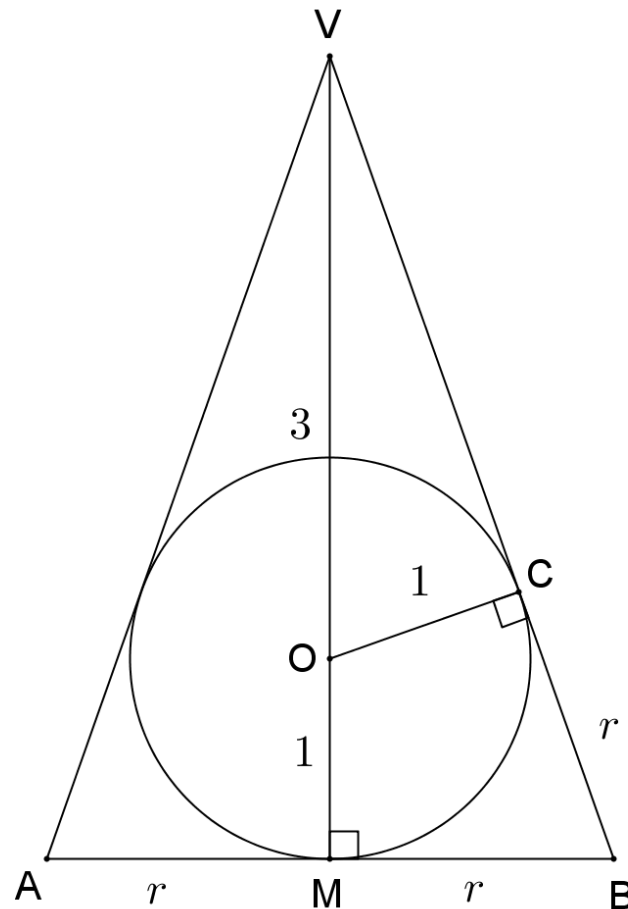
a) 110
b) 210
c) 310
d) 410
e) 510

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O termo de ordem $(p+1)$ no desenvolvimento de $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é dado por $T_{p+1}=\binom{10}{p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p\cdot\left(x^3\right)^{10-p}=\binom{10}{p}\cdot(-1)^p\cdot x^{30-5p}$.
Assim, o termo independente de x ocorre quando $30-5p=0\Leftrightarrow p=6$, ou seja, no termo $T_7=\binom{10}{6}\cdot(-1)^6\cdot x^0=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}=210$.

6) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone (em cm^3) é igual a
a) $\frac{1}{3}\pi$
b) $\frac{2}{3}\pi$
c) $\frac{4}{3}\pi$
d) $\frac{8}{3}\pi$
e) 3π

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Seja VAB a seção meridiana do cone descrito no enunciado e a circunferência de centro O a seção da esfera pelo mesmo plano.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VOC, temos:
$VC^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Leftrightarrow VC = 2\sqrt{2}$.
Como as tangentes à circunferência partindo de um mesmo ponto são iguais, então $BM = BC = r$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VMB, temos:
$r^2 + 4^2 = \left(r + 2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 + 16 = r^2 + 4\sqrt{2}r + 8 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}r = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$.
Logo, o volume do cone é $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$.

7) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a
a) 1000000
b) 1111100
c) 6000000
d) 6666000
e) 6666600

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que a ordem dos números não altera a sua soma.
Cada um dos algarismos aparece $4!$ em cada uma das cinco posições possíveis. Assim, cada algarismo k contribui para a soma com $k \cdot 4! \cdot 11111$.
Logo, a soma de todos os números é $S = (1+3+5+7+9) \cdot 4! \cdot 11111 = 25 \cdot 24 \cdot 11111 = 6666600$.

8) Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \le \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta}$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a

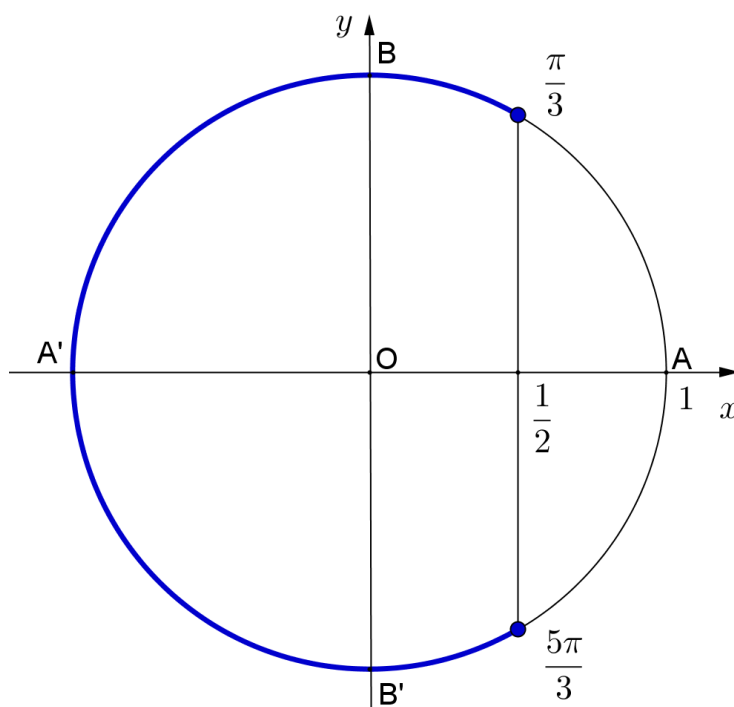
a) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$
b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$
c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$
d) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$
e) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10}\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{3}{7}} 3 = \log_{\frac{3}{7}} 3^{1/2}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\beta} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\log_{\frac{3}{7}} 3^{1/2}} = 3^{1/2}$$

$$3^{\cos(x)} \le \left(\frac{3}{7}\right)^{\beta} \Leftrightarrow 3^{\cos(x)} \le 3^{1/2} \Leftrightarrow \cos(x) \le \frac{1}{2}$$

No intervalo $[0, 2\pi)$, a desigualdade é satisfeita para $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

9) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$. Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) -10
b) -4
c) 0
d) 4
e) 10

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Vamos efetuar a divisão de polinômios pelo método das chaves.

$$\begin{array}{rl} x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 + 0x + 1 & \underline{|x^3 - 3x + 2} \\ \underline{-x^5 \quad + 3x^3 - 2x^2} \quad\quad\quad & x^2 + 2 \\ / \quad / \quad 2x^3 - x^2 + 0x + 1 & \\ \underline{-2x^3 \quad + 6x - 4} & \\ / \quad -x^2 + 6x - 3 & \end{array}$$

Logo, $r(x) = -x^2 + 6x - 3$ e $r(-1) = -(-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 3 = -10$.

10) Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais está definida a função $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

a) $\mathbb{R}-\{-2,2\}$
b) $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$
c) $(-\infty,-2)\cup(-2,1]\cup[5,+\infty)$
d) $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$
e) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Para que a função esteja definida devemos ter $x^2-6x+5\geq 0 \Leftrightarrow (x\leq 1 \text{ ou } x\geq 5)$ e $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.
Portanto, o domínio da função é $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,1]\cup[5,+\infty)$.

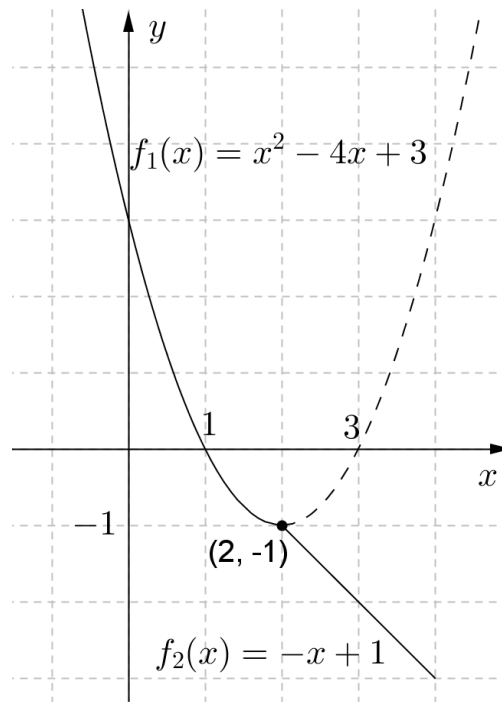
11) Sabendo que "c" e "d" são números reais, o <u>maior valor</u> de "d" tal que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}-x+c, & \text{para } x\geq d\\ x^2-4x+3, & \text{para } x<d\end{cases}$ seja injetora é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Sejam as funções $f_1(x)=x^2-4x+3$, para $x<d$, e $f_2(x)=-x+c$, para $x\geq d$.
A função $f_1(x)=x^2-4x+3$ possui um ponto de mínimo em $x_V=\frac{4}{2}=2$ e $y_V=f_1(2)=-1$.
Se $d>2$, então $f_1(x)$ não é injetora e, consequentemente, $f(x)$ também não é injetora.
Se $d\leq 2$, então $f_1(x)=x^2-4x+3$, para $x<d$, é injetora, mas para que $f(x)$ seja injetora, devemos ter $f_1(d)\geq f_2(d)\Leftrightarrow d^2-4d+3\geq -d+c\Leftrightarrow c\leq d^2-3d+3$.

Assim, o maior valor de "d" para o qual a função é injetora é $d=2$ com a condição de que $c\leq 1$.

Para ficar mais claro, abaixo, apresentamos o gráfico da função para $d=2$ e $c=1$.

12) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ tem como algumas de suas raízes os números -1 e 1. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os números reais para os quais s função $f(x)$ é positiva.

a) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

b) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

c) $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup[2,+\infty)$

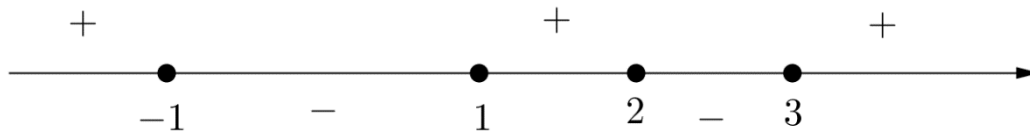
d) $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$

e) $(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Vamos aproveitar as duas raízes dadas no enunciado e aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini.

1	1	–5	5	5	–6
−1	1	–4	1	6	0
	1	–5	6	0	

Logo, $f(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$.
Vamos utilizar o método dos intervalos para resolver a inequação $f(x)>0$.

Portanto, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

13) Considere a função bijetora $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a + b$ é
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
As interseções do gráfico de uma função bijetora com o gráfico de sua inversa estão sobre a reta $y = x$. Assim, temos:
$y = f(x) = -x^2 + 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$
Como $x = -1 \notin D_f = [1, +\infty)$, então a única interseção entre o gráfico de f e o de sua inversa ocorre quando $x = 2$ e $y = f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 2$.
Logo, $(a, b) = (2, 2)$ e $a + b = 2 + 2 = 4$.

14) Seja x um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos são definidos por $a_{ij} = i - j$. Sobre a equação em x definida por $\det(A - xI) = x + \det A$ é correto afirmar que
a) as raízes são 0 e $\frac{1}{2}$.
b) todo x real satisfaz a equação.
c) apresenta apenas raízes inteiras.
d) uma raiz é nula e a outra negativa.
e) apresenta apenas raízes negativas.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1$$

$A - xI = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - xI) = x^2 + 1$

$\det(A - xI) = x + \det A \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Logo, a equação apresenta apenas raízes inteiras.

15) O ponto simétrico do ponto $(1,5)$ em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto

a) $(-3,-1)$

b) $(-1,-2)$

c) $(-4,4)$

d) $(3,8)$

e) $(3,2)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja $A'(a,b)$ o simétrico de $A(1,5)$ em relação à reta $r: 2x + 3y - 4 = 0$, então o ponto médio M de AA' pertence a r e $AA' \perp r$.

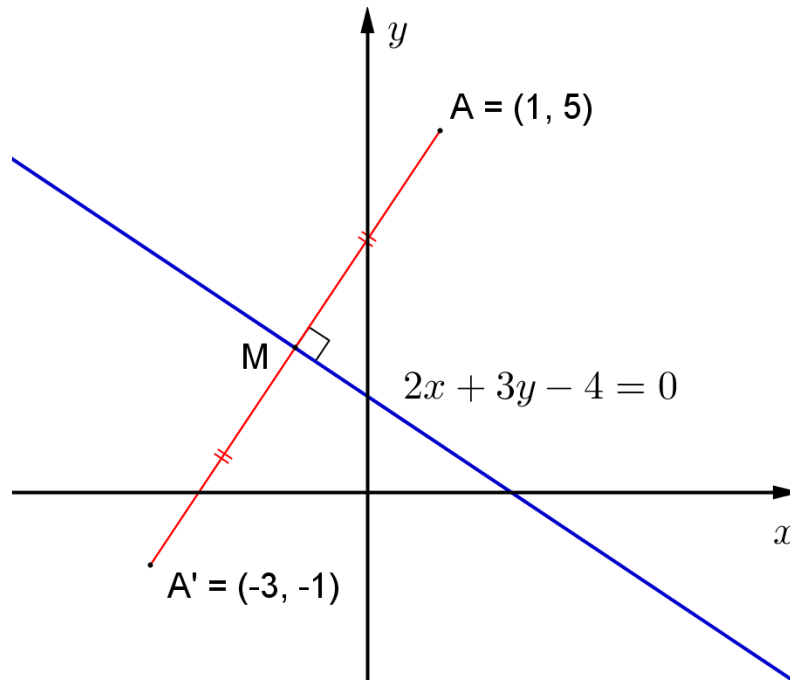
$r: 2x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

$M = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+5}{2}\right) \in r \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{a+1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{b+5}{2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2a + 3b = -9$

$AA' \perp r \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_r = -1 \Leftrightarrow \frac{b-5}{a-1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 2b - 10 = 3a - 3 \Leftrightarrow 3a - 2b = -7$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2a + 3b = -9 \\ 3a - 2b = -7 \end{cases}$, temos: $a = -3$ e $b = -1$.

Portanto, $A' = (-3,-1)$.

O gráfico abaixo representa a solução obtida.

16) A representação geométrica, no Plano de Argand-Gauss, do conjunto de pontos que satisfazem a condição $|z+2-3i|=|z-1+4i|$, com $z=x+yi$, sendo x e y números reais, é a reta de equação

a) $2x-3y+7=0$
b) $3x-7y-2=0$
c) $2x-3y+3=0$
d) $4x-3y+3=0$
e) $2x-y=0$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$|z+2-3i|=|z-(-2+3i)|$ é a distância de $z=x+yi$ a $z_A=-2+3i$.
$|z-1+4i|=|z-(1-4i)|$ é a distância de $z=x+yi$ a $z_B=1-4i$.
Sejam $P(x,y)$, $A(-2,3)$ e $B(1,-4)$, respectivamente, os pontos correspondentes aos complexos $z=x+yi$, $z_A=-2+3i$ e $z_B=1-4i$ no Plano de Argand-Gauss, então $|z+2-3i|=|z-1+4i|$ equivale a $PA=PB$, o que implica que o ponto P pertence à reta mediatriz do segmento AB.
O coeficiente angular de AB é $m_{AB}=\frac{-4-3}{1-(-2)}=-\frac{7}{3}$ e seu ponto médio é $M=\left(\frac{-4+3}{2},\frac{1+(-2)}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
Assim, o coeficiente angular da mediatriz de AB é $m=\frac{3}{7}$ e sua equação é dada por:

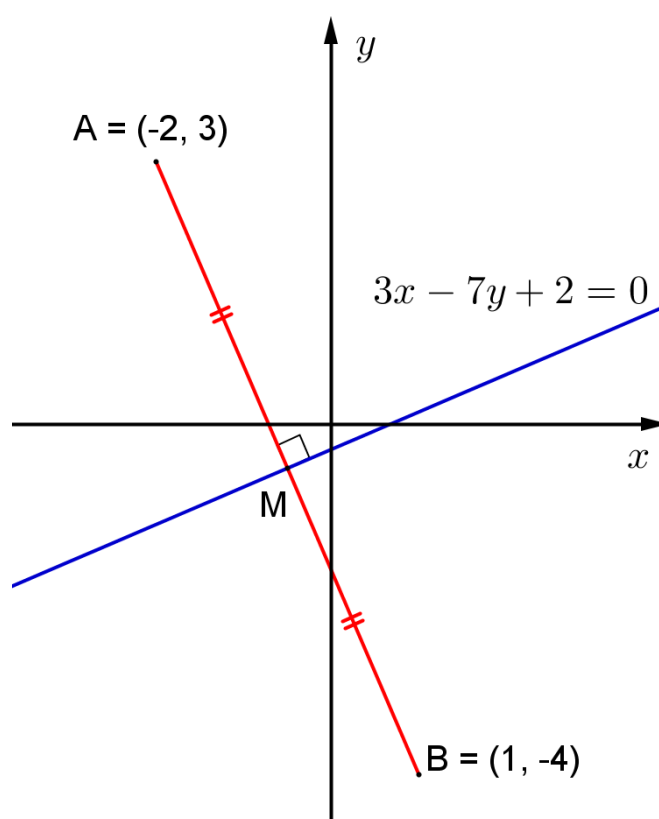
$$\frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{2y+1}{2x+1}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 14y+7=6x+3\Leftrightarrow 3x-7y-2=0.$$

Alternativamente, você poderia determinar a equação da reta diretamente das equações como segue:

$$|z+2-3i|=|z-1+4i|\Leftrightarrow|x+yi+2-3i|=|x+yi-1+4i|\Leftrightarrow|(x+2)+(y-3)i|=|(x-1)+(y+4)i|$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-2x+1+y^2+8y+16$$

$$\Leftrightarrow 6x-14y-4=0\Leftrightarrow 3x-7y-2=0$$

A seguir, apresentamos um gráfico no plano cartesiano representando a solução obtida.

17) O valor de $(\cos 165^\circ+\operatorname{sen}155^\circ+\cos 145^\circ-\operatorname{sen}25^\circ+\cos 35^\circ+\cos 15^\circ)$ é

a) $\sqrt{2}$
b) -1
c) 0
d) 1
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$\cos 165^\circ = \cos\left(180^\circ - 15^\circ\right) = -\cos 15^\circ$

$\text{sen}\,155^\circ = \text{sen}\left(180^\circ - 25^\circ\right) = \text{sen}\,25^\circ$

$\cos 145^\circ = \cos\left(180^\circ - 35^\circ\right) = -\cos 35^\circ$

$\left(\cos 165^\circ + \text{sen}\,155^\circ + \cos 145^\circ - \text{sen}\,25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ\right) =$

$= -\cos 15^\circ + \text{sen}\,25^\circ - \cos 35^\circ - \text{sen}\,25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ = 0$

18) A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 5π
e) 6π

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Vamos fatorar a equação a fim de identificar suas raízes.

$2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos x - 1) - 1(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)\left(\cos^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -1 \vee \cos x = 1$

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2\pi$

Logo, a soma das soluções em $[0, 2\pi]$ é $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + \pi + 0 + 2\pi = 5\pi$.

19) Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x = 3y^2$ no ponto P. Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a) $t: x - 10y + 3 = 0$ e $P(27,3)$
b) $t: 2x - 15y + 6 = 0$ e $P(12,2)$
c) $t: 2x + 15y + 6 = 0$ e $P(12,-2)$
d) $t: y = 0$ e $P(0,0)$
e) $t: x + 6y + 3 = 0$ e $P(3,-1)$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Como $A(-3,0) \in t$, então a equação da reta t dada por $\frac{y-0}{x-(-3)} = m \Leftrightarrow y = mx + 3m$.

Dado que $t: \ y = mx + 3m$ é tangente à parábola $x = 3y^2$, então

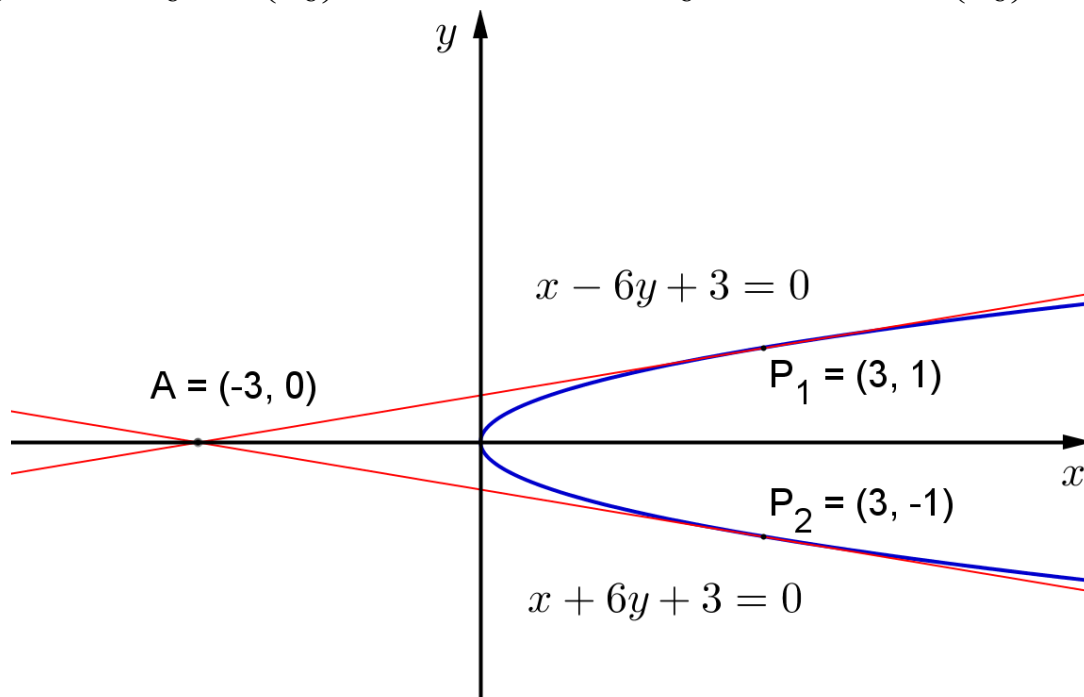
$x = 3(mx+3m)^2 \Leftrightarrow 3m^2x^2 + (18m^2-1)x + 27m^2 = 0$ deve possuir uma única raiz, o que implica que o seu determinante deve ser nulo.

$$\Delta = (18m^2-1)^2 - 4 \cdot 3m^2 \cdot 27m^2 = 1 - 36m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{36} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{6}$$

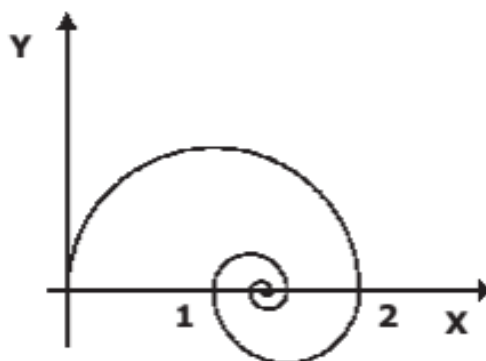
$$x = \frac{-(18m^2-1)}{2 \cdot 3m^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{m^2} - 3$$

Assim, temos as duas soluções possíveis representadas no gráfico abaixo:

$$m = \frac{1}{6} \Rightarrow t: \ y = \frac{1}{6}x + 3 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow x - 6y + 3 = 0 \ \wedge \ x_P = \frac{1}{6} \cdot 36 - 3 = 3 \ \wedge \ y_P = \frac{1}{6} \cdot (3+3) = 1$$

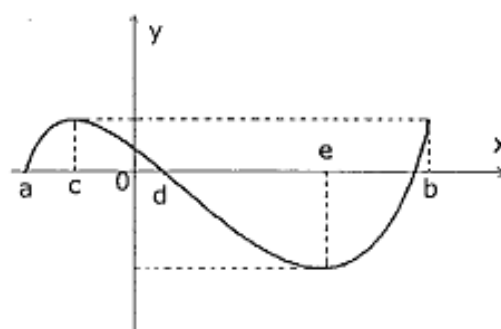
$$m = -\frac{1}{6} \Rightarrow t: \ y = -\frac{1}{6}x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x + 6y + 3 = 0 \ \wedge \ x_P = \frac{1}{6} \cdot 36 - 3 = 3 \ \wedge \ y_P = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (3+3) = -1$$

A alternativa e) apresenta a segunda solução obtida.

20) Na figura temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Os raios dos semicírculos formam uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$.
O comprimento de cada semicírculo é igual a π vezes o seu raio, então os comprimentos dos semicírculos também formam uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$.
Sabemos que a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo a_1 e razão q, com $|q|<1$, é igual a $S=\frac{a_1}{1-q}$.
Portanto, o comprimento da espiral é dado por
$S=\pi\cdot 1+\pi\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\frac{1}{4}+\ldots=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=2\pi$ unidades de comprimento.

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2013/2014

1) Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a,b]$. Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:

desenho ilustrativo - fora de escala

a) f é crescente no intervalo $[a,0]$.

b) $f(x) \leq f(e)$ para todo x no intervalo $[d,b]$.

c) $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo $[c,0]$.

d) a função f é decrescente no intervalo $[c,e]$.

e) se $x_1 \in [a,c]$ e $x_2 \in [d,e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

a) INCORRETA, pois no intervalo $[c,0] \subset [a,0]$ a função é decrescente.

b) INCORRETA, pois $f(e) \leq f(x)$ para todo $x \in [d,b]$.

c) INCORRETA, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in [c,0]$.

d) CORRETA, pois $\forall x_1 < x_2$ em $[c,e]$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, f é decrescente em $[c,e]$.

e) INCORRETA, pois $f(x_1) > 0 > f(x_2)$.

2) Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$. Qual foi a largura do rio que ele encontrou?

a) $9\sqrt{3}$ metros.

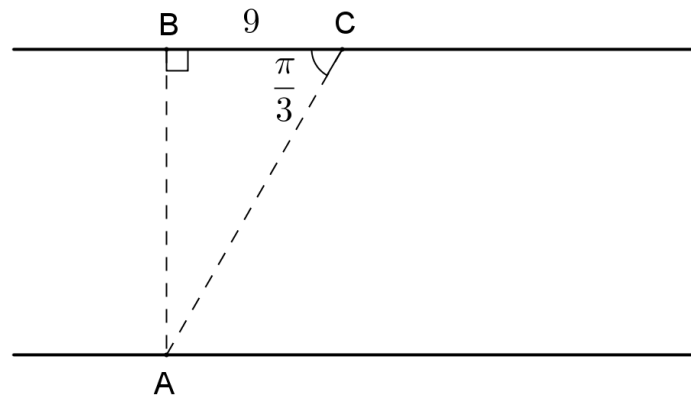
b) $3\sqrt{3}$ metros.

c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros.

d) $\sqrt{3}$ metros.

e) $4,5$ metros.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

A largura do rio é a medida de $\overline{AB}$. No triângulo retângulo ABC, temos $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AB}}{9} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = 9\sqrt{3}\text{ m}$.

3) Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km^2, a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

a) $\frac{23}{2}\pi$

b) $\frac{23}{4}\pi$.

c) $\frac{385}{8}\pi$.

d) $\frac{195}{4}\pi$.

e) $\frac{529}{4}\pi$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sejam r_A, r_B e r_C os raios de alcance dos canhões A, B e C, respectivamente. Como assume-se que os círculos são tangentes entre si, então temos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 9 \\ r_B + r_C = 8 \\ r_A + r_C = 6 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (r_A + r_B + r_C) = 23 \Leftrightarrow r_A + r_B + r_C = \frac{23}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_A = \frac{23}{2} - 8 = \frac{7}{2} \\ r_B = \frac{23}{2} - 6 = \frac{11}{2} \\ r_C = \frac{23}{2} - 9 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Portanto, a área total que está protegida por esses 3 canhões é

$$S = \pi \cdot \left(r_A^2 + r_B^2 + r_C^2\right) = \pi \cdot \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) = \frac{195\pi}{4} \text{ km}^2 .$$

4) Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento se um número múltiplo de 12 é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{8}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, então a sua quantidade de divisores inteiros positivos é $D(360) = (3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 24$. Portanto, o número de elementos do espaço amostral é $n(\Omega) = 24$

Para encontrar a quantidade de divisores de 360 que são múltiplos de 12, observamos que $360 = 12 \cdot 30 = 12 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)$. Logo, a quantidade de divisores de 360 que são múltiplos de 12 é $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 8$. Portanto, o número de casos favoráveis é $n(A) = 8$.

Assim, a probabilidade pedida é $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

5) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultate das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

a) 4 lotes.

b) 5 lotes.

c) 6 lotes.

d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

RESPOSTA: d

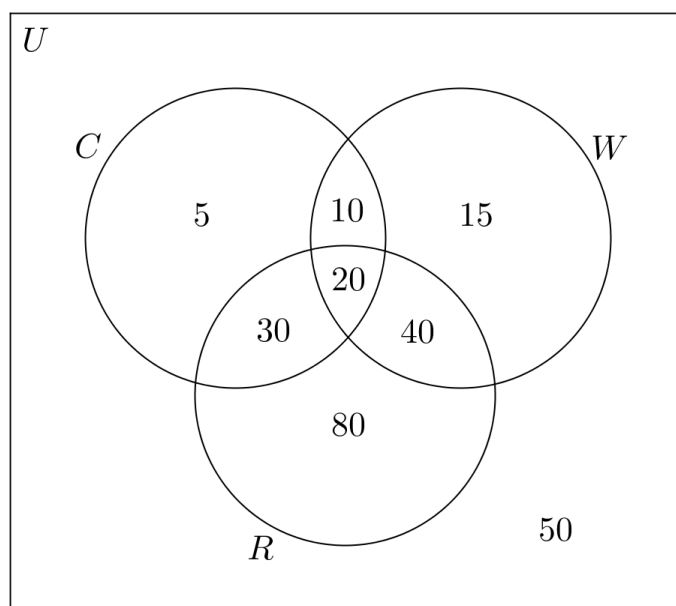
RESOLUÇÃO:
$L(x)=V(x)-C(x)=(3x^2-12x)-(5x^2-40x-40)=-2x^2+28x+40$
Como o lucro é dado por um trinômio do 2° grau com termo quadrático negativo, então possui valor máximo que ocorre no vértice do trinômio, quando o número de lotes é $x=\frac{-28}{2\cdot(-2)}=7$.

6) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker, wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers.*
- 170 pessoas compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers, cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas comram *wafers* e recheados.
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.
a) 200
b) 250
c) 320
d) 370
e) 530

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Vamos representar as informações do enunciado em um diagrama de Venn, onde o conjunto C representa a pessoas que compram *cream cracker*, o conjunto W as pessoas que compram *wafer* e o conjunto R as pessoas que compram recheados.

Assim, o número de pessoas que respondeu à pesquisa foi $n(U)=170+15+10+5+50=250$.

7) Sobre a curva $9x^2+25y^2-36x+50y-164=0$, assinale a alternativa correta.

a) Seu centro é $(-2,1)$.
b) A medida do seu eixo maior é 25.
c) A medida do seu eixo menor é 9.
d) A distância focal é 4
e) Sua excentricidade é $0,8$.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$9x^2+25y^2-36x+50y-164=0 \Leftrightarrow 9(x^2-4x+4)+25(y^2+2y+1)=164+36+25$

$\Leftrightarrow 9(x-2)^2+25(y+1)^2=225 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

Logo, a equação representa uma elipse de centro $(2,-1)$, eixo maior horizontal, onde $a^2=25 \Leftrightarrow a=5$, $b^2=9 \Leftrightarrow b=3$ e $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow c^2=25-9=16 \Leftrightarrow c=4$.

Assim, o eixo maior é $2a=10$, o eixo menor é $2b=6$, a distância focal é $2c=8$ e a excentricidade $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}=0,8$.

8) Considere uma laranja que tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície de cada gomo mede:

a) $\dfrac{4^3\pi}{3}\text{ cm}^2$

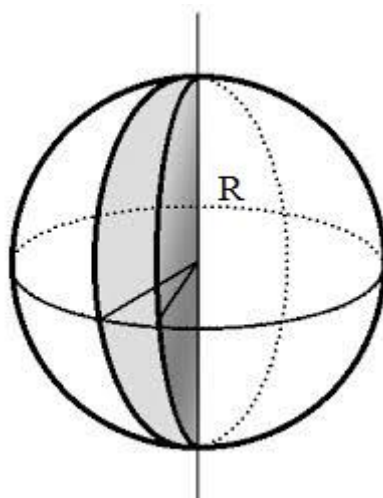
b) $\frac{4^3\pi}{9}\text{ cm}^2$

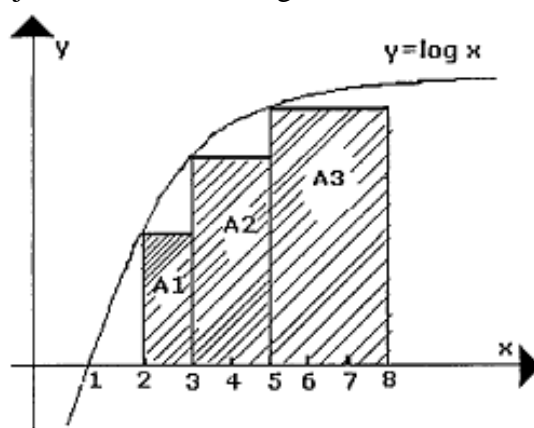
c) $\frac{4^2\pi}{3}\text{ cm}^2$

d) $\frac{4^2\pi}{9}\text{ cm}^2$

e) $4^3\pi\text{ cm}^2$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Cada gomo é uma cunha esférica e sua superfície é formada por dois semicírculos e $\frac{1}{12}$ da superfície da esfera. Assim, a área de cada gomo é $S=\pi\cdot R^2+\frac{1}{12}\cdot 4\pi R^2=\frac{4\pi}{3}\cdot R^2=\frac{4\pi}{3}\cdot 4^2=\frac{4^3\pi}{3}\text{ cm}^2$.

9) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y=\log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:

desenho ilustrativo - fora de escala

a) $\log 2+\log 3+\log 5$

b) log30
c) $1+\log 30$
d) $1+2\log 15$
e) $1+2\log 30$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O retângulo A_1 tem base 1 e altura $\log 2$, então sua área é $S_1 = 1\cdot\log 2$.
O retângulo A_2 tem base 2 e altura $\log 3$, então sua área é $S_2 = 2\cdot\log 3$.
O retângulo A_3 tem base 3 e altura $\log 5$, então sua área é $S_3 = 3\cdot\log 5$.
Portanto, a soma das áreas é dada por:

$$S_1+S_2+S_3=\log 2+2\log 3+3\log 5=(\log 2+\log 5)+2\cdot(\log 3+\log 5)=$$
$$=\log(2\cdot 5)+2\cdot\log(3\cdot 5)=1+2\log 15.$$

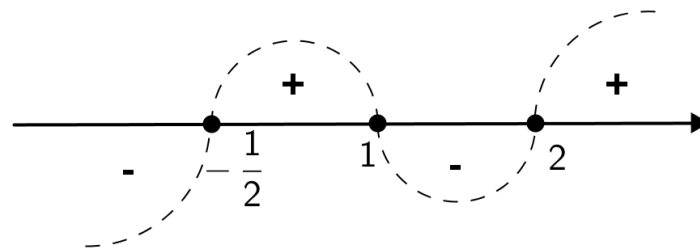
10) Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:
a) $\{x\in\mathbb{R} \mid 1\le x\le 2\}$
b) $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\le -\frac{1}{2}\right\}$
c) $\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{2}\le x\le 1 \text{ ou } x\ge 2\right\}$
d) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ne 2\}$
e) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\ne 2 \text{ e } x\ne 1\}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para a raiz 2 do polinômio $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$, a fim de identificar as outras raízes de $P(x)$.

	2	–5	1	2
2	2	–1	–1	0

Assim, o polinômio pode ser fatorado na forma $P(x)=2x^3-5x^2+x+2=(x-2)(2x^2-x-1)$. Logo, as outras duas raízes de $P(x)$ são as raízes da equação $2x^2-x-1=0$ que são $x=-\frac{1}{2}$ e $x=1$.

Os valores de x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida satisfazem $P(x)\ge 0$.
Vamos resolver essa inequação pelo método dos intervalos.

Analisando o estudo de sinal acima relativo ao polinômio $P(x)$ concluímos que $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \vee x \geq 2$.

Logo, então o conjunto de todos os números reais x para os quais $\sqrt{P(x)}$ está definida é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\right\}$.

11) Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t) = \frac{20000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2 \cong 0,30$ e $\log 3 \cong 0,48$, 2000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em

a) 7 dias.
b) 19 dias.
c) 3 meses.
d) 7 meses.
e) 1 ano.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$N(t) = \frac{20000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}} = 2000 \Leftrightarrow 2 + 15 \cdot 4^{-2t} = 10 \Leftrightarrow 15 \cdot 4^{-2t} = 8 \Leftrightarrow \log\left(15 \cdot 2^{-4t}\right) = \log\left(2^3\right)$$

$$\Leftrightarrow \log 5 + \log 3 - 4t \log 2 = 3 \log 2 \Leftrightarrow (1 - \log 2) + \log 3 - 3 \log 2 = 4t \log 2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 - 4 \log 2 + \log 3}{4 \log 2} = \frac{1 + \log 3}{4 \log 2} - 1 = \frac{1 + 0,48}{4 \cdot 0,3} - 1 = \frac{7}{30} \text{ mês} = 7 \text{ dias}$$

12) As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote e nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura. Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contém os possíveis valores de x.

a) $[6,10]$
b) $[8,14]$
c) $[10,18]$
d) $[16,24]$
e) $[12,24]$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A área total do lote é $S_L = 20 \cdot 30 = 600\ \text{m}^2$, então a área construída deve estar entre $40\% \cdot 600 = 240\ \text{m}^2$ e $60\% \cdot 600 = 360\ \text{m}^2$.

A área construída é dada em função de x por $S(x) = \dfrac{(x+12)\cdot 20}{2} = 10x + 120$.

Assim, devemos ter: $240 \le S(x) \le 360 \Leftrightarrow 240 \le 10x + 120 \le 360 \Leftrightarrow 120 \le 10x \le 240 \Leftrightarrow 12 \le x \le 24$, ou seja, $x \in [12,24]$.

13) O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\dfrac{2}{3}$
b) $\dfrac{3}{2}$
c) 0
d) -2
e) $-\dfrac{1}{3}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}, \text{ onde } \det A = 3$$

O elemento a_{23}^{-1} da matriz inversa é igual ao elemento $\overline{a}_{23}$ da matriz adjunta dividido pelo $\det A$.
Como a matriz adjunta $\overline{A}$ é a transposta da matriz dos cofatores A', o elemento $\overline{a}_{23}$ da matriz adjunta é igual ao elemento A_{32} da matriz dos cofatores, ou seja, $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$.

Assim, temos: $a_{23}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{a}_{23} = \frac{1}{3} \cdot \overline{a}_{23} = \frac{1}{3} \cdot A_{32} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

14) Sendo z o número complexo obtido na rotação de 90°, em relação à origem, do número complexo $1+i$, determine z^3:
a) $1-i$
b) $-1+i$
c) $-2i$
d) $-1-2i$
e) $2+2i$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
O número complexo obtido na rotação de 90°, em relação à origem, do número complexo $1+i$ é $z = (1+i) \cdot \text{cis}\, 90^\circ = (1+i) \cdot i = -1+i$.
Assim, $z^3 = (-1+i)^3 = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i + 3 \cdot (-1) \cdot i^2 + i^3 = -1+3i+3-i = 2+2i$.

15) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é
a) 18 cm^3.
b) 36 cm^3.
c) $18\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
d) $36\sqrt{3}\text{ cm}^3$.
e) 40 cm^3.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

No prisma original, temos $\frac{a_b}{a_L}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a_L = a_b\sqrt{3}$ e o volume é $V = 6\cdot\frac{a_b^2\sqrt{3}}{4}\cdot a_L = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot a_b^2\cdot a_L$.

No novo prisma, temos: $\bar{a}_b = a_b + 2$, $\bar{a}_L = a_L$ e o volume é $\bar{V} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot \bar{a}_b^2\cdot \bar{a}_L = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot (a_b+2)^2\cdot a_L$.

Como o volume fica aumentado em 108 cm^3, temos:

$$\bar{V} - V = 108 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(a_b+2)^2\cdot a_L - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot a_b^2\cdot a_L = 108 \Leftrightarrow \left(a_b^2+4a_b+4-a_b^2\right)\cdot a_L = 24\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (a_b+1)\cdot a_L = 6\sqrt{3}$$

Como $a_L = a_b\cdot\sqrt{3}$, temos:

$$(a_b+1)\cdot a_b\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow a_b^2 + a_b - 6 = 0 \Leftrightarrow a_b = -3\ (\text{não convém}) \lor a_b = 2.$$

Assim, as arestas originais são $a_b = 2$, $a_L = a_b.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ e o volume original é $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 2^2\cdot 2\sqrt{3} = 36\text{ cm}^3$.

16) Se $Y = \{y \in \mathbb{R}\ \text{ tal que } |6y-1| \ge 5y-10\}$, então:

a) $Y = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$

b) $Y = \{-1\}$

c) $Y = \mathbb{R}$

d) $Y = \varnothing$

e) $Y = \left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$Y = \{y \in \mathbb{R}\ \text{ tal que } |6y-1| \ge 5y-10\}$

Se $6y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge \frac{1}{6}$, então $|6y-1| = 6y-1$. Assim, temos:

$$|6y-1| \ge 5y-10 \Leftrightarrow 6y-1 \ge 5y-10 \Leftrightarrow y \ge -9.$$

Fazendo a interseção dos dois intervalos, temos: $S_1 = \left[\frac{1}{6}, +\infty\right[$.

Se $6y - 1 < 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{6}$, então $|6y-1| = -(6y-1) = -6y+1$. Assim, temos:

$$|6y-1| \ge 5y-10 \Leftrightarrow -6y+1 \ge 5y-10 \Leftrightarrow 11y \le 11 \Leftrightarrow y \le 1.$$

Fazendo a interseção dos dois intervalos, temos: $S_2 = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right[$.

O conjunto solução da inequação é $S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$.

17) Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+25=0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1,1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.

a) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+16=0$
b) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+12=0$
c) $\lambda: x^2-y^2+4x-5y+16=0$
d) $\lambda: x^2+y^2-4x-5y+12=0$
e) $\lambda: x^2-y^2-4x-10y-17=0$

RESPOSTA: b

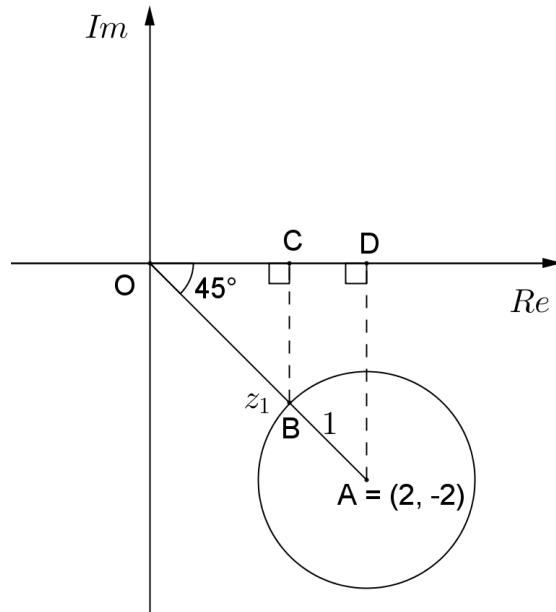
RESOLUÇÃO:
Vamos reescrever a equação da circunferência λ a fim de identificar seu centro:
$\lambda: x^2+y^2+4x+10y+25=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+10y+25=4 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+5)^2=2^2$
Portanto, λ é uma circunferência de centro no ponto $O=(-2,-5)$ e raio 2.
O ponto simétrico do ponto $(-1,1)$ em relação ao eixo das abscissas é $P(-1,-1)$.
A circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto $P(-1,-1)$ deve ter centro $O=(-2,-5)$ e raio igual a $\overline{OP}=\sqrt{(-1-(-2))^2+(-1-(-5))^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$. Assim, a equação dessa circunferência é dada por: $(x+2)^2+(y+5)^2=(\sqrt{17})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x+10y+12=0$.

18) De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z-(2-2i)|=1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 é igual a:

a) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Os números complexos z que satisfazem a condição $|z-(2-2i)|=1$ encontram-se em uma circunferência de centro em $(2-2i)$ e raio 1 no plano de Argand-Gauss, conforme representado na figura a seguir:

O número complexo z_1 mais próximo da origem é a interseção entre a circunferência e o segmento $\overline{OA}$ que liga a origem ao centro da circunferência.

$\overline{OA}=\sqrt{(2-0)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{OB}=\overline{OA}-1=2\sqrt{2}-1$

Como $\Delta OCB \sim \Delta ODA$, temos $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{OC}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OC}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Note que $\overline{OC}$ é a parte real de z_1, logo $\text{Re}(z_1)=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ e $z_1=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}i$.

19) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha:	1						
2ª linha:	3	5					
3ª linha:	7	9	11				
4ª linha:	13	15	17	19			
5ª linha:	21	23	25	27	29		
...	...	...	...	...	...	...	

O primeiro elemento da 43^a linha, na horizontal, é:

a) 807
b) 1007
c) 1307
d) 1507
e) 1807

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

A quantidade de números escritos até a 42^a linha é $1+2+3+\ldots+42=\frac{(1+42)\cdot 42}{2}=903$. Assim, o primeiro elemento da 43^a linha, na horizontal, é o 904° número natural ímpar, ou seja, em uma PA de primeiro termo $a_1=1$ e razão $r=2$, ele será $a_{904}=a_1+r(904-1)=1+2\cdot 903=1807$.

20) Dado o polinômio $q(x)$ que satisfaz a equação $x^3+ax^2-x+b=(x-1)\cdot q(x)$ e sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $x^3+ax^2-x+b=0$, determine o intervalo no qual $q(x)\le 0$:

a) $[-5,-4]$

b) $[-3,-2]$

c) $[-1,2]$

d) $[3,5]$

e) $[6,7]$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Vamos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para as raízes 1 e 2 do polinômio $p(x)=x^3+ax^2-x+b$.

	1	a	-1	b
1	1	$a+1$	a	$a+b=0$
2	1	$a+3$	$3a+6=0$	

$3a+6=0 \Leftrightarrow a=-2$

$a+b=0 \Leftrightarrow b=-a=2$

Assim, o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x)=x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(x+1)$ e $q(x)=(x-2)(x+1)$.

Note que o fator $x+1=1\cdot x+(a+3)$ e aparece ao final do algoritmo.

Logo, $q(x)=(x-2)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 2$, ou seja, o intervalo procurado é $[-1,2]$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2012/2013

1) Considere a circunferência $(\lambda)\, x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P\left(1, \sqrt{3}\right)$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

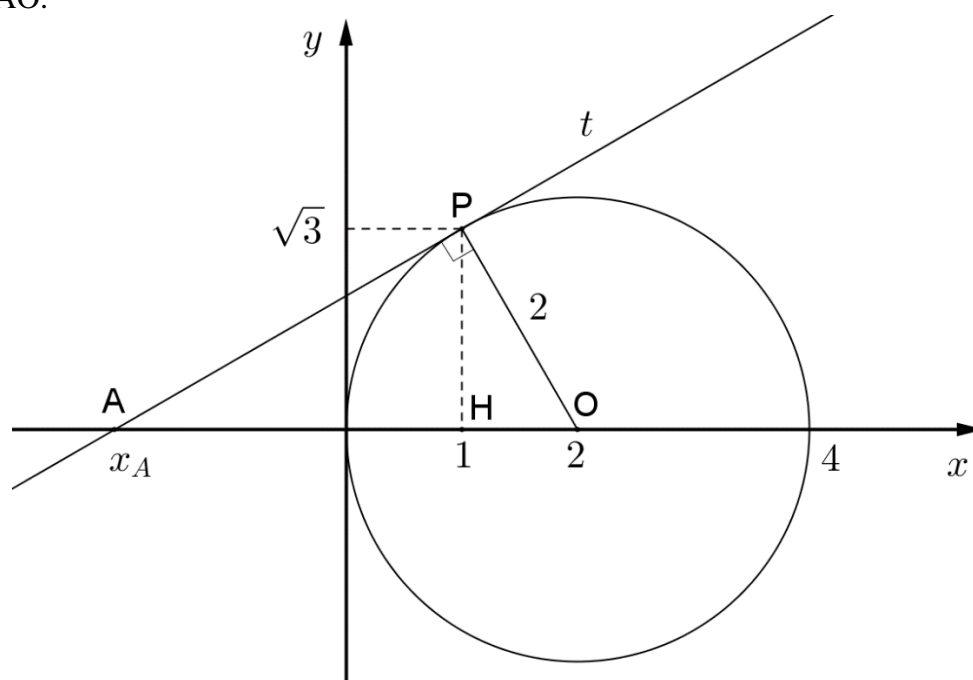
b) $2+\sqrt{3}$

c) 3

d) $3+\sqrt{3}$

e) $3+3\sqrt{3}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$(\lambda): x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2^2$

Portanto, a circunferência λ tem centro $O(2,0)$ e raio 2.

A reta t é tangente à circunferência λ no ponto P, então $\overline{OP} \perp \overline{AP}$, o que implica que o triângulo APO é retângulo.

Sabemos que, em um triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos, então

$\overline{PH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{OH} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = \overline{AH} \cdot (2-1) \Leftrightarrow \overline{AH} = 3 \Rightarrow 1 - x_A = 3 \Leftrightarrow x_A = -2$

2) Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio de base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu

interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será:

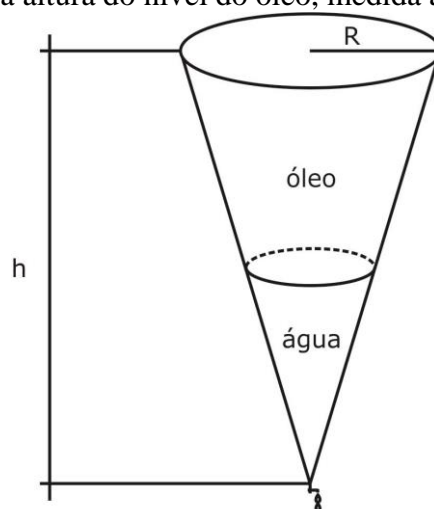



Figura fora de escala

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$

b) $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$

c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$

d) $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$

e) $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\frac{V_{\text{água}}}{V_{\text{água}}+V_{\text{óleo}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\Leftrightarrow V_{\text{óleo}}=7\cdot V_{\text{água}}$$

$$\frac{V_{\text{óleo}}}{V_{\text{cone}}}=\frac{7\cdot V_{\text{água}}}{7\cdot V_{\text{água}}+V_{\text{água}}}=\frac{7}{8}=\left(\frac{h_{\text{óleo}}}{h_{\text{cone}}}\right)^3\Leftrightarrow\frac{h_{\text{óleo}}}{h_{\text{cone}}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$$

3) A probabilidade de se obter um número divisível por 2 na escolha ao acaso de uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 é

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{5}$

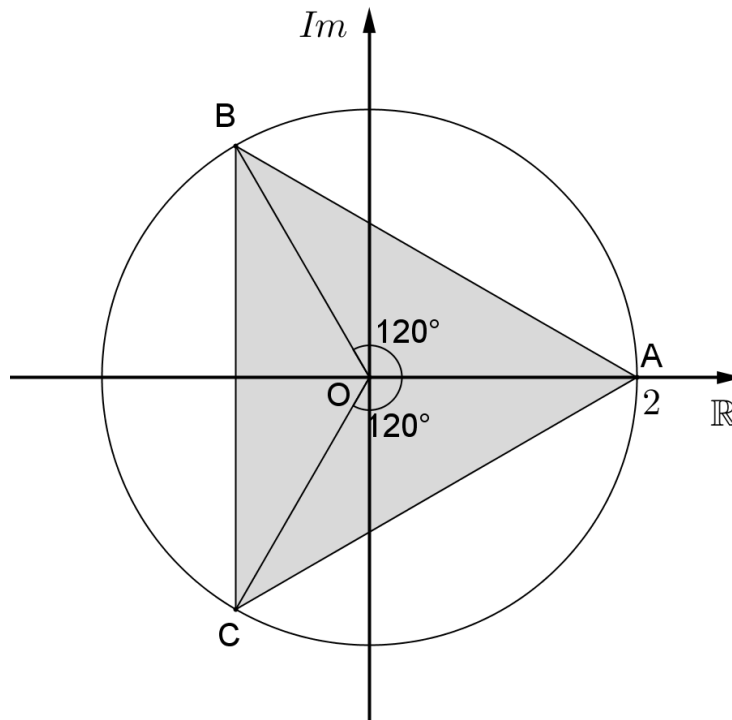
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O número de elementos do espaço amostral Ω é igual ao total de permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, então $n(\Omega)=P_5=5!=120$.
Para calcular a quantidade de números divisíveis por 2, temos 2 possibilidades para o algarismo das unidades (2 ou 4) e $P_4=4!$ para os algarismos restantes. Assim, o número de casos favoráveis é dado por $n(A)=2\cdot 4!=48$.
Logo, a probabilidade pedida é $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$.

4) A figura geométrica formada pelos afixos das raízes complexas da equação $x^3-8=0$ tem área igual a
a) $7\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
As raízes complexas da equação $x^3-8=0$ estão sobre uma circunferência de raio $\sqrt[3]{8}=2$ e dividem a circunferência em três partes iguais. Sendo assim, formam um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $R=2$.

Seja L o lado do triângulo equilátero, então $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Logo, a área do triângulo equilátero é $S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ u.a..

Alternativamente, podemos resolver a equação diretamente.

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8\text{cis}0 \Leftrightarrow x = 2\text{cis}\frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 2\text{cis}0 = 2 \\ x_2 = 2\text{cis}\frac{2\pi}{3} = -1 + \sqrt{3} \cdot i \\ x_3 = 2\text{cis}\frac{4\pi}{3} = -1 - \sqrt{3} \cdot i \end{array} \right.$$

Os pontos correspondentes aos números complexos no plano de Argand-Gauss são $(2,0)$, $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ e $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$. A área obtida unindo-se esses pontos é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \right| = 3\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

5) Se $\frac{6 - \log_a m}{1 + \log_{a^2} m} = 2$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $m > 0$, então o valor de $\frac{\sqrt{m}}{a + \sqrt{m}}$ é

a) 4

b) $\frac{1}{4}$

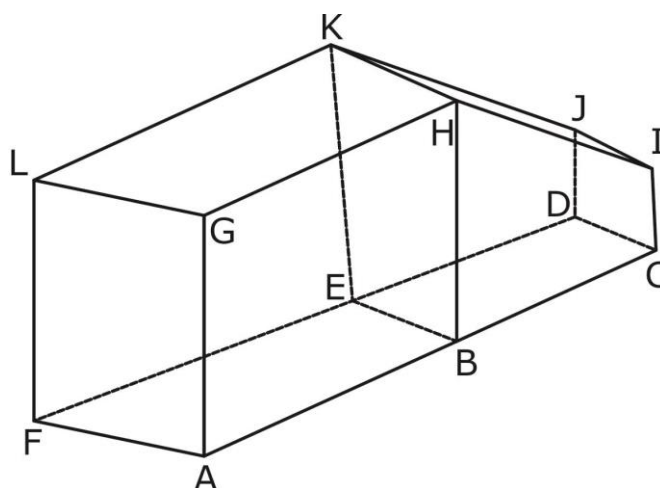
c) 1

d) 2
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$$\frac{6-\log_a m}{1+\log_{a^2} m}=2 \Leftrightarrow \frac{6-\log_a m}{1+\frac{1}{2}\log_a m}=2 \Leftrightarrow 6-\log_a m=2+\log_a m \Leftrightarrow \log_a m=2 \Leftrightarrow a^2=m$$

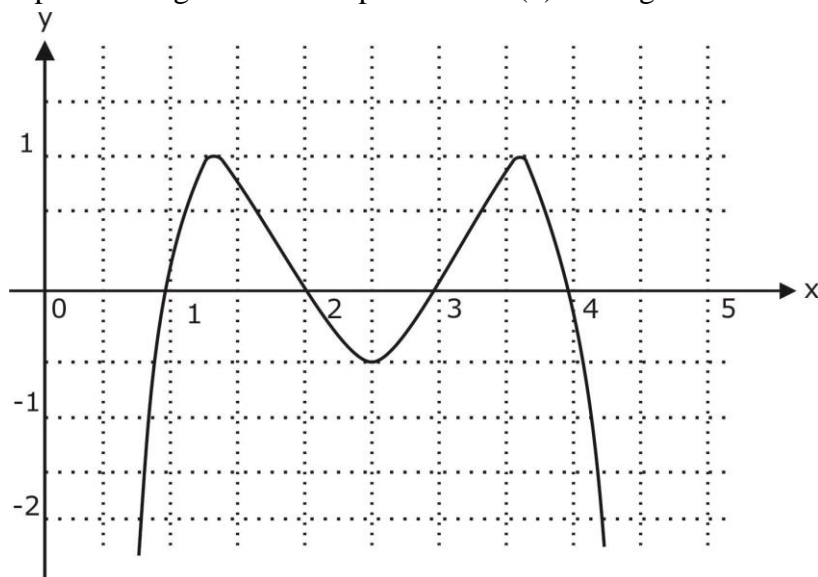
Como $a>0$ e $a\neq 1$, temos: $\frac{\sqrt{m}}{a+\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{a^2}}{a+\sqrt{a^2}}=\frac{a}{a+a}=\frac{1}{2}$.

6) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguinte pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

a) concorrentes; reversas; reversas.
b) reversas; reversas; paralelas.
c) concorrentes; reversas; paralelas.
d) reversas; concorrentes; reversas.
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

RESPOSTA: e

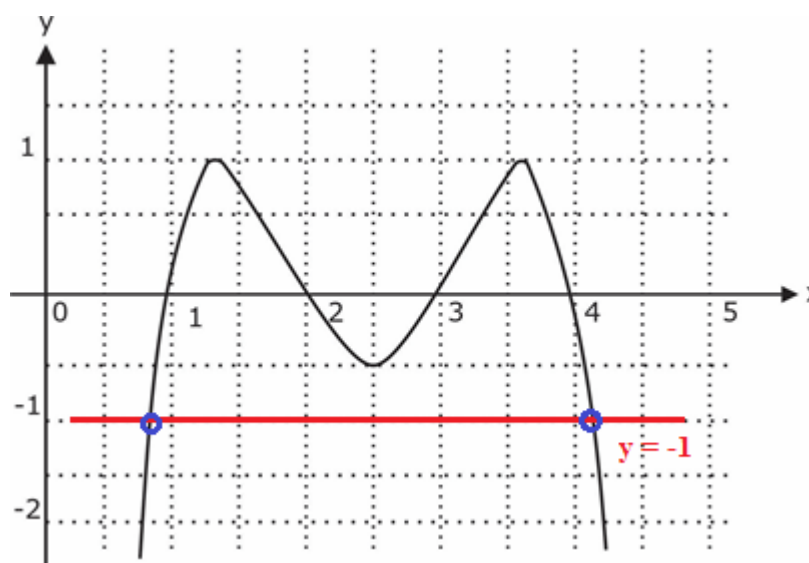
RESOLUÇÃO:
No bloco retangular (prisma reto-retângulo), os segmentos de reta $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$ são diagonais, logo são concorrentes.
As retas obtidas prolongando-se $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ elas irão se interceptar, logo são concorrentes. Observe que esses segmentos são coplanares e não paralelos.

As retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$ são retas que pertencem a dois planos paralelos e não são paralelas, logo são reversas.

7) A figura a seguir apresenta o gráfico de um polinômio P(x) do 4° grau no intervalo $]0,5[$.

O número de raízes reais da equação $P(x)+1=0$ no intervalo $]0,5[$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

RESPOSTA: c

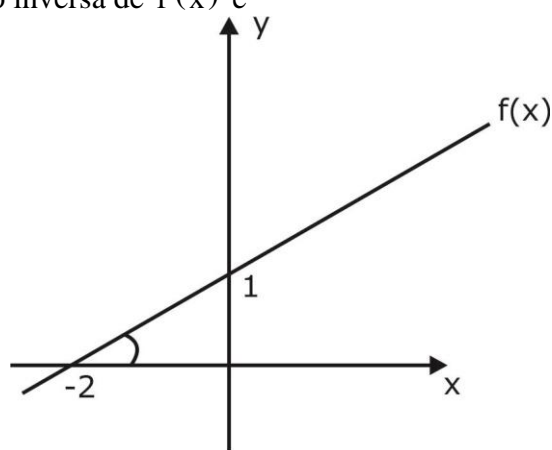
RESOLUÇÃO:

$P(x)+1=0 \Leftrightarrow P(x)=-1$

Deve-se então identificar as interseções do gráfico de P(x) com a reta $y=-1$.
As duas interseções correspondem às duas raízes da equação original.

8) Em uma progressão aritmética, a soma S_n de seus n primeiros termos é dada pela expressão $S_n=5n^2-12n$, com $n\in\mathbb{N}^*$. A razão dessa progressão é
a) -2
b) 4
c) 8
d) 10
e) 12

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja a P.A. (a_n) de razão r.
$S_1=a_1=5\cdot1^2-12\cdot1=-7\Leftrightarrow a_1=-7$
$S_2=a_1+a_2=5\cdot2^2-12\cdot2=-4\Leftrightarrow a_1+a_2=-4$
$a_2=(a_1+a_2)-a_1=-4-(-7)=3$
$r=a_2-a_1=3-(-7)=10$

9) Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função real do 1° grau $f(x)$. A expressão algébrica que define a função inversa de $f(x)$ é

a) $y=\frac{x}{2}+1$
b) $y=x+\frac{1}{2}$
c) $y=2x-2$
d) $y=-2x+2$
e) $y=2x+2$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja $y = f(x) = ax + b$, então
$(0,1) \in f \Leftrightarrow f(0) = a \cdot 0 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1$
$(-2,0) \in f \Leftrightarrow f(-2) = a \cdot (-2) + b = 0 \Leftrightarrow -2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
Logo, a expressão de $f(x)$ é $y = f(x) = \frac{x}{2} + 1$.
Invertendo a função:
$y = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2y = x + 2 \Leftrightarrow x = 2y - 2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x = 2y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2$

10) Sendo $\overline{Z}$ conjugado do número complexo Z e i a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição $Z + 2 \cdot \overline{Z} = 2 - Z \cdot i$ é
a) $Z = 0 + 1 \cdot i$
b) $Z = 0 + 0 \cdot i$
c) $Z = 1 + 0i$
d) $Z = 1 + i$
e) $Z = 1 - i$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja $z = a + bi$.
$Z + 2 \cdot \overline{Z} = 2 - Z \cdot i \Rightarrow (a + bi) + 2 \cdot (a - bi) = 2 - (a + bi) \cdot i \Leftrightarrow 3a - bi = 2 + b - ai \Rightarrow (3a - b - 2) + (a - b)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 2 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow Z = 1 + i$$

11) Um polinômio $q(x)$, do 2° grau, é definido por $q(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$. Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x) = q(1 - x)$, para todo x real, é
a) $q(x) = a(x^2 + x) + c$
b) $q(x) = a(x^2 - x) + c$
c) $q(x) = a^2(x^2 - x) + c$
d) $q(x) = a^2(x^2 + x) + c$
e) $q(x) = ax^2 + c$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$q(x)=q(1-x) \Leftrightarrow ax^2+bx+c=a(1-x)^2+b(1-x)+c \Leftrightarrow ax^2+bx=a-2ax+ax^2+b-bx$

$\Leftrightarrow 2(a+b)x-(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=0$

Logo, $q(x)=ax^2-ax+c=a(x^2-x)+c$

12) Considere as seguintes afirmações:
(I) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;
(II) Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano α é a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de 60°;
(III) Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;
(IV) Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.
Estão corretas as afirmações
a) Apenas I e II
b) Apenas II e III
c) I, II e III
d) I, II e IV
e) II, III e IV

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
(I) Verdadeira
Essa proposição é a definição de reta perpendicular a plano.
(II) Verdadeira
Se $\overline{A'B'}$ é a projeção de $\overline{AB}$ sobre α, então $\cos\alpha=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=60^\circ$.
(III) Falsa
As interseções entre esses planos são duas retas pertencentes ao plano γ. Como essas retas são coplanares, então não são reversas.
(IV) Falsa
Contra exemplo: Sejam $r=\alpha\cap\beta$ e $s\subset\alpha$ tal que $s//r$, então $s\cap\beta=\varnothing$.

13) Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & x\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}x & y+4\\ y & 3\end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de $x+y$ é
a) -1
b) -2
c) -3
d) -4
e) -5

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$B=\left(A^{-1}\right)^{T} \Leftrightarrow B^{T}=A^{-1} \Leftrightarrow AB^{T}=I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ y+4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5(y+4)=1 \\ 3y+15=0 \\ x+x(y+4)=0 \\ y+3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \\ x=2 \end{cases}$$

Logo, $x+y=-3$

14) Seja a função $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{se x for racional} \\ 2x^4, & \text{se x for irracional} \\ x^2+8, & \text{se x não for real} \end{cases}$.

Assim, o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(i^{64}+5i^{110}\right)+f\left(f\left(\sqrt{-2}\right)\right)$, em que $i^2=-1$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

$$i^{64}+5i^{110}=\left(i^4\right)^{16}+5\cdot\left(i^4\right)^{27}\cdot i^2=1^{16}+5\cdot 1^{27}\cdot(-1)=1+5\cdot 1\cdot(-1)=-4$$

$$f\left(i^{64}+5i^{110}\right)=f(-4)=2\cdot(-4)-1=-9$$

$$\sqrt{-2}\notin\mathbb{R}\Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{-2}\right)^2+8=-2+8=6$$

$$f\left(f\left(-\sqrt{2}\right)\right)=f(6)=2\cdot 6-1=11$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(i^{64}+5i^{110}\right)+f\left(f\left(\sqrt{-2}\right)\right)=0+(-9)+11=2$$

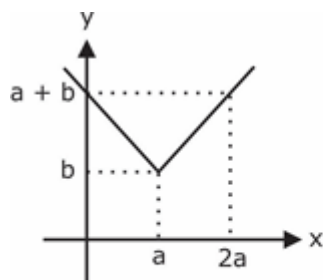
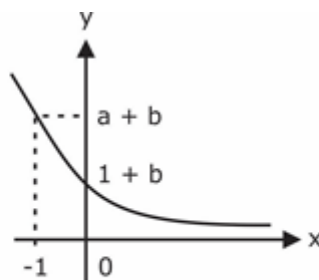
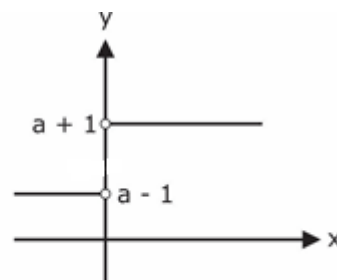
15) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento m na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento m é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.
Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é

a) 3m
b) 4m
c) 5m
d) 6m
e) 7m

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O comprimento de cada faixa é $\frac{2}{3}$ do comprimento da faixa anterior. Assim, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é a soma de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo $a_1 = m$ e razão $q = \frac{2}{3}$, ou seja,

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{m}{1-\frac{2}{3}} = 3m.$$

16) Na figura abaixo estão representados os gráficos de três funções reais, sendo $a > 1$ e $b > 0$.

As expressões algébricas que podem representar cada uma dessas funções são, respectivamente,

a) $y=|x-a|-b$; $y=\left(\frac{1}{1+b}\right)^x+a$ e $y=\frac{|x+a|}{x-a}$

b) $y=|x-a|+b$; $y=(1+a)^x+b$ e $y=\frac{|x|}{x}+a$

c) $y=|x+a|=b$; $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x+b$ e $y=\frac{|x+a|}{x+a}$

d) $y=|x-a|+b$; $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x+b$ e $y=\frac{|x|}{x}+a$

e) $y=|x+a|+b$; $y=\left(\frac{1}{1+b}\right)^x+a$ e $y=\frac{|x+a|}{x-a}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Gráfico 1: As semirretas têm inclinação de $45°$, logo esse gráfico vem de um deslocamento de a para a direita e de b para cima do gráfico de $y=|x|$. Portanto, a expressão dessa função é $y=|x-a|+b$.
Gráfico 2: O gráfico assemelha-se ao de uma função exponencial deslocada de b para cima. Uma possível expressão da função é $f(x)=k^x+b$. O ponto $(-1,a+b)\in f$, então $f(-1)=k^{-1}+b=a+b \Leftrightarrow k=\frac{1}{a}$. Portanto, a expressão dessa função pode ser $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x+b$.
Gráfico 3: Esse gráfico vem do deslocamento de a para cima do gráfico de $y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & \text{se } x>0\\ -1, & \text{se } x<0\end{cases}$.
Portanto, a expressão dessa função é $f(x)=\frac{|x|}{x}+a$.

17) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:
- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos,
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de
a) 6 acertos e 2 erros.
b) 5 acertos e 3 erros.
c) 4 acertos e 4 erros.
d) 3 acertos e 5 erros.
e) 2 acertos e 6 erros.

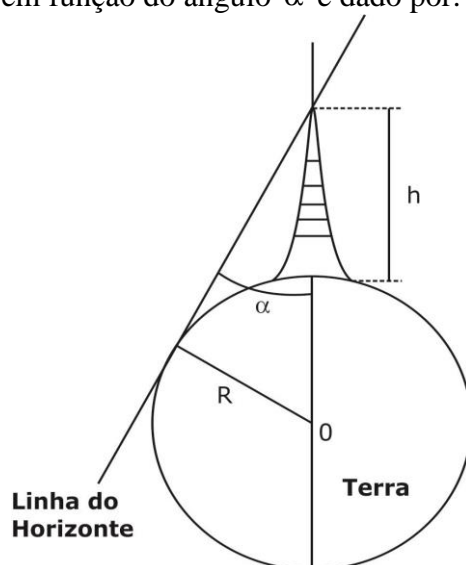
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

A cada vez que o aluno acerta sua quantidade de pontos fica multiplicada por $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ e a cada vez que ele erra sua quantidade de pontos fica multiplicada por $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Supondo que, em 8 rodadas, o aluno teve x acertos, então ele teve $8-x$ erros e sua pontuação será $256\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}=256-13 \Leftrightarrow 256\cdot 3^{x}\cdot 2^{(-x-8+x)}=243 \Leftrightarrow 256\cdot 3^{x}\cdot 2^{-8}=3^{5} \Leftrightarrow 3^{x}=3^{5} \Leftrightarrow x=5$.

Portanto, o desempenho do aluno foi de 5 acertos e 3 erros.

18) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:

a) $R=\frac{\operatorname{sen}(\alpha h)}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

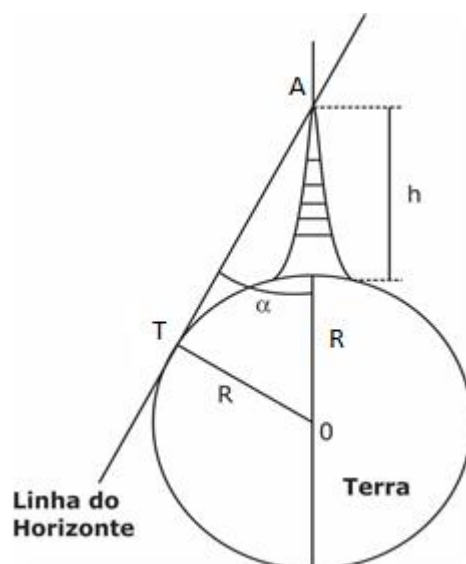
b) $R=\frac{h\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

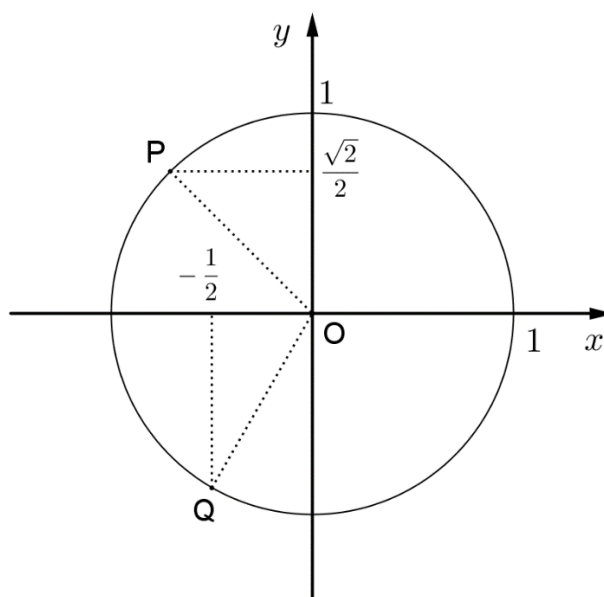
c) $R=\frac{h\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-1}$

d) $R=\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{h\operatorname{sen}\alpha}$

e) $R=\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{h\operatorname{sen}\alpha}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Sabendo que a reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência, então o triângulo AOT é retângulo.

No triângulo retângulo AOT, temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{OT}{AO} = \frac{R}{h+R} \Leftrightarrow h\operatorname{sen}\alpha + R\operatorname{sen}\alpha = R \Leftrightarrow R = \frac{h\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

19) Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1,0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo. O valor de $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
c) $2+\sqrt{3}$
d) $2-\sqrt{3}$

e) $-1+\sqrt{3}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O ponto P está associado ao arco α do 2º quadrante tal que $\text{sen}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ e $\text{tg}\,\alpha=-1$.

O ponto Q está associado ao arco β do 3º quadrante tal que $\cos\beta=-\frac{1}{2}$. Portanto, $\beta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ e $\text{tg}\,\beta=\sqrt{3}$.

Logo, $\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta}=\frac{(-1)+\sqrt{3}}{1-(-1)\cdot\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=2-\sqrt{3}$.

20) Sejam as funções reais $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ e $g(x)=x-1$. O domínio da função $f(g(x))$ é

a) $D=\{x\in\mathbb{R}|x\le-3 \text{ ou } x\ge1\}$

b) $D=\{x\in\mathbb{R}|-3\le x\le1\}$

c) $D=\{x\in\mathbb{R}|x\le1\}$

d) $D=\{x\in\mathbb{R}|0\le x\le4\}$

e) $D=\{x\in\mathbb{R}|x\le0 \text{ ou } x\ge4\}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

A função $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ está definida quando $x^2+4x\ge0\Leftrightarrow x\le-4$ ou $x\ge0$.

Para que a função $f(g(x))$ esteja definida, devemos ter $g(x)\le-4$ ou $g(x)\ge0$.

$g(x)=x-1\le-4\Leftrightarrow x\le-3$

$g(x)=x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge1$

Assim, o domínio da função $f(g(x))$ é $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le-3 \text{ ou } x\ge1\}$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2011/2012

1) Considere as funções reais $f(x)=3x$, de domínio $[4,8]$ e $g(y)=4y$, de domínio $[6,9]$. Os valores máximo e mínimo que o quociente $\frac{f(x)}{g(y)}$ pode assumir são, respectivamente

a) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$ e 1

c) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{3}$

e) 1 e $\frac{1}{3}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$12=3\cdot 4\le f(x)=3x\le 3\cdot 8=24$$

$$24=4\cdot 6\le g(y)=4y\le 4\cdot 9=36$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(y)}\right]_{MAX}=\frac{[f(x)]_{MAX}}{[g(y)]_{MIN}}=\frac{24}{24}=1$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(y)}\right]_{MIN}=\frac{[f(x)]_{MIN}}{[g(y)]_{MAX}}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

2) Seja o número complexo $z=\frac{x+yi}{3+4i}$, com x e y reais e $i^2=-1$. Se $x^2+y^2=20$, então o módulo de z é igual a:

a) 0

b) $\sqrt{5}$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) 4

e) 10

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$z=\frac{x+yi}{3+4i}\Rightarrow |z|=\left|\frac{x+yi}{3+4i}\right|=\frac{|x+yi|}{|3+4i|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3) O domínio da função real $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-8x+12}$ é

a) $]2,\infty[$

b) $]2,6[$

c) $]-\infty,6]$

d) $]-2,2]$

e) $]-\infty,2[$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
O domínio de f deve ter $2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ e $x^2-8x+12\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \ \wedge \ x\neq 6$.
Logo, $D_f=]-\infty,2[$

4) Na Física, as leis de Kepler descrevem o movimento dos planetas ao redor do Sol. Define-se como período de um planeta o intervalo de tempo necessário para que este realize uma volta completa ao redor do Sol. Segundo a terceira lei de Kepler, "Os quadrados dos períodos de revolução (T) são proporcionais aos cubos das distâncias médias (R) do Sol aos planetas", ou seja, $T^2=kR^3$, em que k é a constante de proporcionalidade.
Sabe-se que a distância do Sol a Júpiter é 5 vezes a distância Terra-Sol; assim, se denominarmos T ao tempo necessário para que a Terra realize uma volta em torno do Sol, ou seja, ao ano terrestre, a duração do "ano" de Júpiter será

a) $3\sqrt{5}T$

b) $5\sqrt{3}T$

c) $3\sqrt{15}T$

d) $5\sqrt{5}T$

e) $3\sqrt{3}T$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja R' a distância do Sol-Júpiter e R a distância Terra-Sol, então $R'=5R$.
Sabe-se que $T^2=kR^3$ e sendo T' o "ano" de Júpiter, temos:
$(T')^2=k(R')^3=k(5R)^3=125kR^3=125T^2 \Leftrightarrow T'=5\sqrt{5}T$

5) Considerando $\log 2=0,30$ e $\log 3=0,48$, o número real x, solução da equação $5^{x-1}=150$, pertence ao intervalo:

a) $]-\infty, 0]$
b) $[4, 5[$
c) $]1, 3[$
d) $[0, 2[$
e) $[5, +\infty[$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$$5^{x-1} = 150 \Leftrightarrow 5^{x-1} = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2 \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow \log 5^{x-3} = \log(2 \cdot 3) \Leftrightarrow (x-3) \cdot \log 5 = \log 2 + \log 3 \Leftrightarrow (x-3) \cdot \log \frac{10}{2} = \log 2 + \log 3$$
$$\Leftrightarrow (x-3) \cdot (1 - \log 2) = \log 2 + \log 3 \Leftrightarrow x = 3 + \frac{\log 2 + \log 3}{1 - \log 2} = 3 + \frac{0,30 + 0,48}{1 - 0,30} = 3 + \frac{0,78}{0,70}$$
$$1 < \frac{0,78}{0,70} < 2 \Rightarrow 4 < 3 + \frac{0,78}{0,70} < 5 \Rightarrow x \in]4,5[\subset [4,5[$$

6) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3} x y^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é
a) Ambos no primeiro quadrante.
b) Um no quarto quadrante e outro no eixo X.
c) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
d) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo Y.
e) Um no segundo quadrante e o outro no eixo X.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$$\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3} x y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3^{3y} = 3^2 \\ y^2 \left(y + \frac{2}{3} x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+3y} = 3^2 \\ y^2 \left(y + \frac{2}{3} x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ y = 0 \ \vee \ y = -\frac{2}{3} x \end{cases}$$
Assim, temos:
$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2,0) \in Ox$$
$$y = -\frac{2}{3} x \Rightarrow x + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} x \right) = 2 \Leftrightarrow x = -2 \ \wedge \ y = \frac{4}{3} \Rightarrow B\left(-2, \frac{4}{3} \right) \in 2°Q$$

7) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão

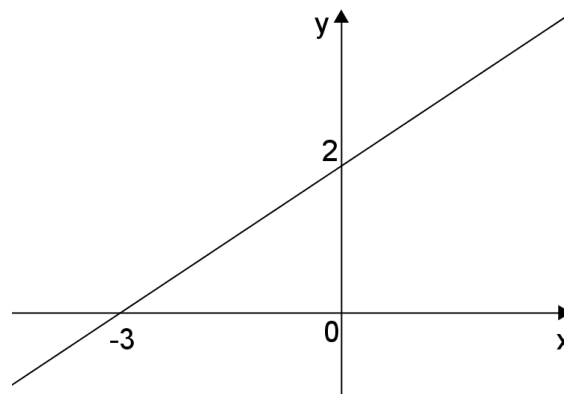
$N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$, a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a

a) 5^{-1}
b) -5^{-1}
c) 10
d) 10^{-1}
e) -10^{-1}

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$N(10) = \frac{N_0}{4} \Leftrightarrow N_0 \cdot 2^{k \cdot 10} = 2^{-2} \cdot N_0 \Leftrightarrow 2^{10k} = 2^{-2} \Leftrightarrow 10k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5} = -5^{-1}$

8) Considere a função real $f(x)$, cujo gráfico está representado na figura, e a função real $g(x)$, definida por $g(x) = f(x-1) + 1$.

O valor de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ é

a) -3
b) -2
c) 0
d) 2
e) 3

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Considerando a forma segmentária da equação da reta, temos: $\frac{x}{-3} + \frac{f(x)}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

Assim, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} - 1\right) + 1 = f\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \left[\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2\right] + 1 = 2$.

9) A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$, em que x é um número real,
a) não tem solução.
b) tem apenas uma solução.
c) tem apenas soluções positivas.
d) tem apenas soluções negativas.
e) tem soluções positivas e negativas.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
$10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111 \Rightarrow 10^x + 10^x \cdot 10^1 + 10^x \cdot 10^2 + 10^x \cdot 10^3 + 10^x \cdot 10^4 < 11111$
$\Leftrightarrow 10^x \cdot (1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4) < 11111 \Leftrightarrow 10^x \cdot 11111 < 11111 \Leftrightarrow 10^x < 1 \Leftrightarrow 10^x < 10^0 \Leftrightarrow x < 0$
Logo, a inequação tem apenas soluções negativas.

10) O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale
a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$
b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$
c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$
d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$
e) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Na expressão $\theta = \frac{|60h - 11m|}{2}$, temos $h = 2$ e $m = 30$, logo $\theta = \frac{|60 \cdot 2 - 11 \cdot 30|}{2} = 105°$.
Assim, $\cos 105° = \cos(90° + 15°) = -\text{sen}\,15° = -\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$.
O valor de $\text{sen}\,15°$ pode ser obtido da forma a seguir:
$\text{sen}\,15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen}\,45° \cos 30° - \text{sen}\,30° \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

11) O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + \left(\text{tg}\,2220°\right)^2$ é:

a) -1
b) 0
c) $\frac{1}{2}$
d) 1
e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: d

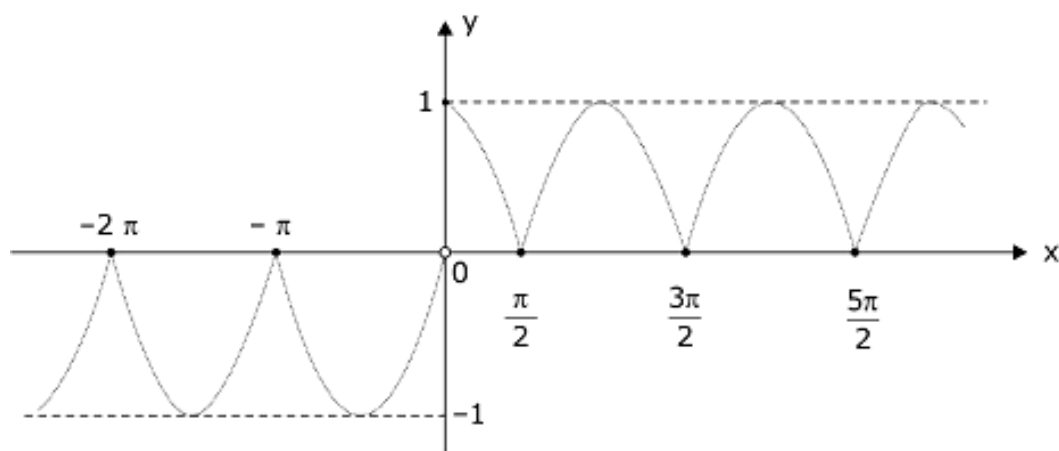
RESOLUÇÃO:

$$\sec 1320^\circ = \frac{1}{\cos(7 \cdot 180^\circ + 60^\circ)} = \frac{1}{-\cos 60^\circ} = \frac{1}{-1/2} = -2$$

$$\cos\frac{53\pi}{3} = \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2220^\circ = \operatorname{tg}(12 \cdot 180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220^\circ)^2 = \frac{-2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1$$

12) A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo.

A expressão algébrica de $f(x)$ é

a) $f(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

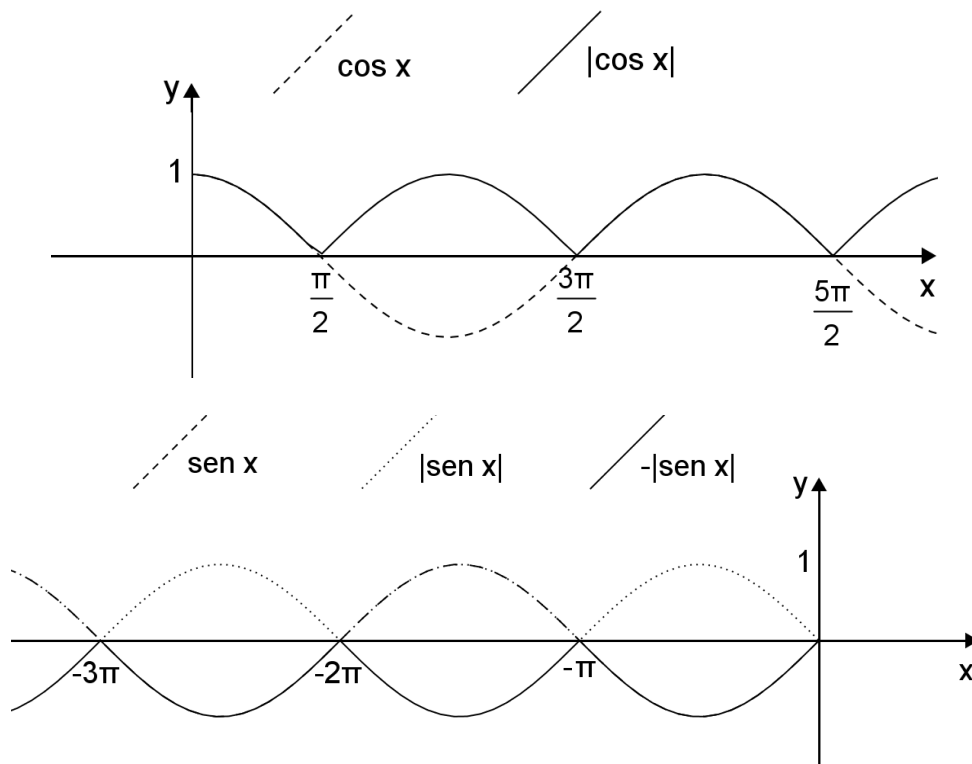
b) $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

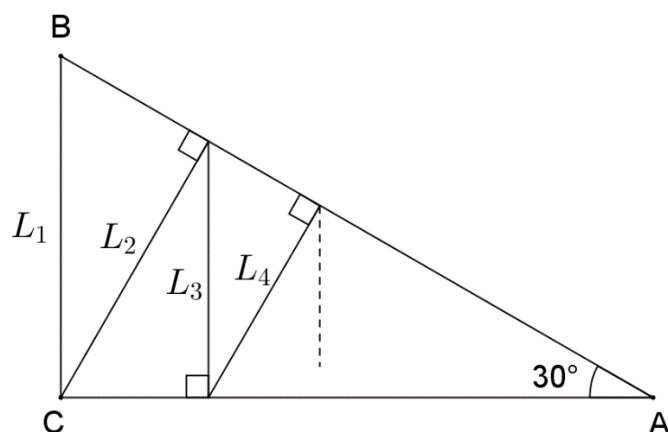
c) $f(x) = \begin{cases} -|\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} |\text{sen } x|, & \text{se } x<0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -\text{sen } x, & \text{se } x<0 \\ \cos x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja uma função $F(x)$, o gráfico de $|F(x)|$ pode ser obtido, a partir do gráfico de $F(x)$, refletindo-se a parte negativa em relação ao eixo Ox e o gráfico de $-F(x)$, obtido, a partir do gráfico de $F(x)$, refletindo-se todo o gráfico em relação ao eixo Ox.
Analisando os gráficos das funções seno e cosseno abaixo, temos:

Se $x \geq 0$, o gráfico do enunciado representa $f_1(x)=|\cos x|$.
Se $x<0$, o gráfico do enunciado representa $f_2(x)=-|\text{sen } x|$.
Então, o gráfico completo representa a função $f(x)=\begin{cases} -|\text{sen } x|, & \text{se } x<0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

13) Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em C, em que $B\hat{A}C=30°$. Neste triângulo está representada uma sequência de segmentos cujas medidas estão indicadas por $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, em que cada segmento é perpendicular a um dos lados do ângulo de vértice A. O valor $\dfrac{L_9}{L_1}$ é

a) $\dfrac{27\sqrt{3}}{128}$

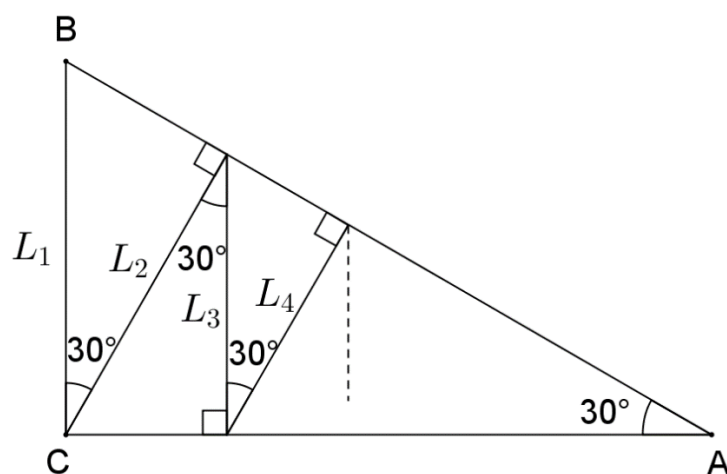
b) $\dfrac{1}{128}$

c) $\dfrac{81}{256}$

d) $\dfrac{27}{64}$

e) $\dfrac{1}{256}$

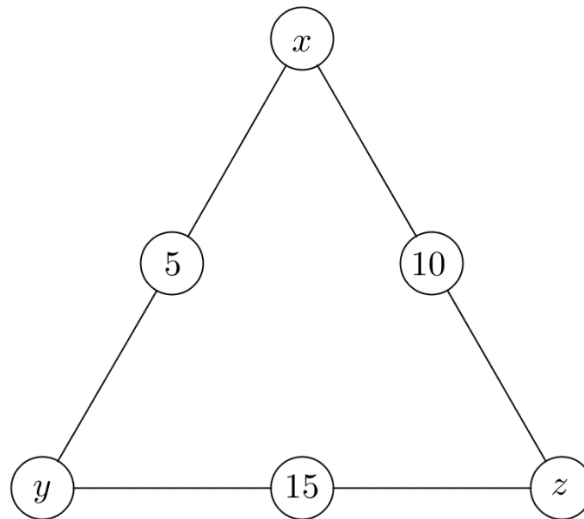
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Nos triângulos retângulos da figura, temos: $\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_3}{L_2} = \frac{L_4}{L_3} = \ldots = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, a sequência $L_1, L_2, L_3, \ldots$ é uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sendo assim, $L_9 = L_1 \cdot q^{9-1} \Leftrightarrow \frac{L_9}{L_1} = q^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 = \frac{3^4}{2^8} = \frac{81}{256}$.

Como o ângulo $B\hat{A}C = 30^0$, observamos que
$L_2 = L_1.\cos 30^0, L_3 = L_2.\cos 30^0 = L_1.(\cos 30^0)^2, ..., L_n = L_1.(\cos 30^0)^{n-1}$,
ou seja, a sequência $L_1, L_2, L_3, ...$ é uma PG cuja de razão $\cos 30^o$. Portanto,
$L_9 = L_1.(\cos 30^0)^8 \Leftrightarrow \frac{L_9}{L_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8 = \frac{81}{256}$

14) A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.

Assim, o valor numérico da expressão $x - y \cdot z$
a) -2
b) -1
c) 2
d) 5
e) 10

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é 24, temos:
$$\begin{cases} x+5+y=24 \\ y+15+z=24 \\ x+10+z=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=19 \\ y+z=9 \\ x+z=14 \end{cases}$$
Somando as três igualdades: $2(x+y+z) = 19+9+14 = 42 \Leftrightarrow x+y+z = 21$.

Subtraindo dessa última igualdade cada uma das três igualdades anteriores:
$(x+y+z)-(x+y)=21-19 \Leftrightarrow z=2$
$(x+y+z)-(y+z)=21-9 \Leftrightarrow x=12$
$(x+y+z)-(x+z)=21-14 \Leftrightarrow y=7$
Portanto, $x-y \cdot z=12-7 \cdot 2=-2$.

15) Se todos os anagramas da palavra ESPCEX forem colocados em ordem alfabética, a palavra ESPCEX ocupará, nessa ordenação, a posição
a) 144
b) 145
c) 206
d) 214
e) 215

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Todos os anagramas iniciados com C vem antes de ESPCEX e são $P_5^{2,1,1,1}=\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$.
Os anagramas iniciados por EC vem antes de ESPCEX e são $4!=24$.
Os anagramas iniciados por EE vem antes de ESPCEX e são $4!=24$.
Os anagramas iniciados por EP vem antes de ESPCEX e são $4!=24$.
Os anagramas iniciados por ESC vem antes de ESPCEX e são $3!=6$.
Os anagramas iniciados por ESE vem antes de ESPCEX e são $3!=6$.
Logo, há $60+3 \cdot 24+2 \cdot 6=144$ anagramas antes da palavra ESPCEX, donde sua posição é 145.

16) Se x é um número real positivo, então a sequência $(\log_3 x, \log_3 3x, \log_3 9x)$ é
a) uma progressão aritmética de razão 1.
b) uma progressão aritmética de razão 3.
c) uma progressão geométrica de razão 3.
d) uma progressão aritmética de razão $\log_3 x$.
e) uma progressão geométrica de razão $\log_3 x$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
$\log_3 3x=\log_3 3+\log_3 x=1+\log_3 x$
$\log_3 9x=\log_3 9+\log_3 x=\log_3 3^2+\log_3 x=2+\log_3 x$
Portanto, a diferença entre os termos consecutivos da sequência é sempre 1, o que implica que a sequência é uma progressão aritmética de razão 1.

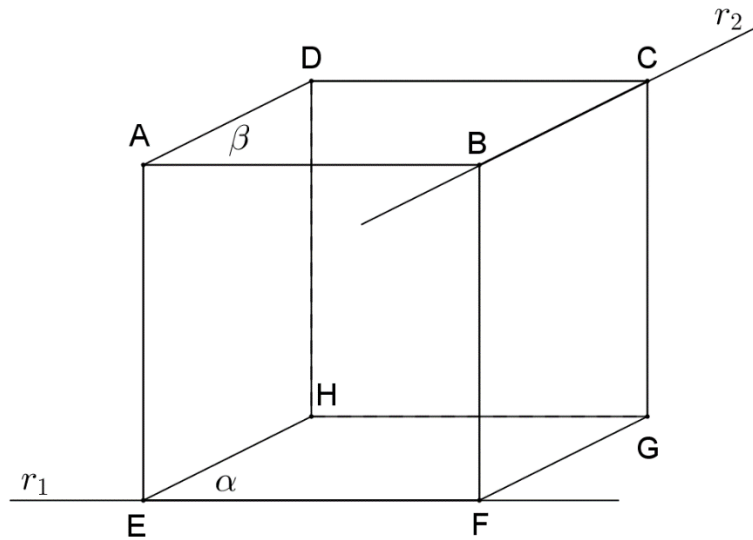
17) Pesquisas revelaram que, numa certa região, 4% dos homens e 10% das mulheres são diabéticos. Considere um grupo formado por 300 homens e 700 mulheres dessa região. Tomando-se ao acaso uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que essa pessoa seja diabética é
a) 4%
b) 5%
c) 5,4%
d) 7,2%
e) 8,2%

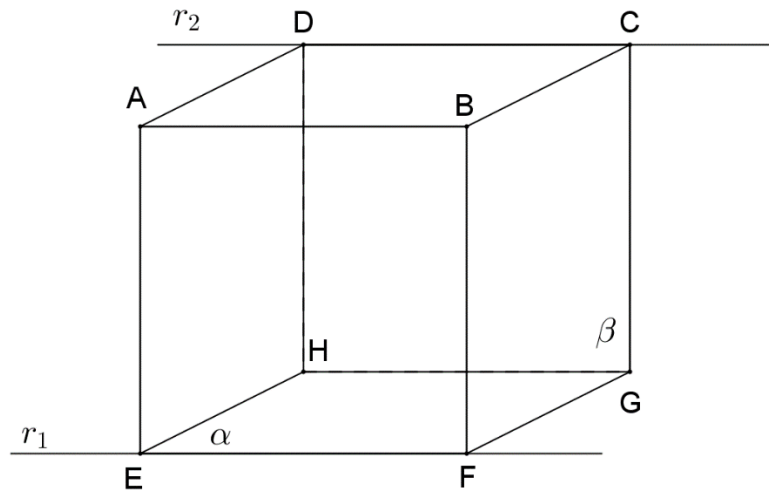
RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A quantidade de homens diabéticos é $4\% \cdot 300 = 12$ e a quantidade de mulheres diabéticas é $10\% \cdot 700 = 70$.
O número de pessoas diabéticas é $n(A) = 12 + 70 = 82$ (número de casos favoráveis) e o número total de pessoas é $n(\Omega) = 300 + 700 = 1000$ (número de elementos do espaço amostral).
Portanto, tomando-se ao acaso uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que essa pessoa seja diabética é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{82}{1000} = 8,2\%$.

18) Considere as seguintes afirmações:
I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.
II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.
III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.
Dentre as afirmações acima, é(são) verdadeira(s)
a) Somente II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) I, II e III

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I. Falso.

Contraexemplo: No cubo ABCDEFGH da figura, $\alpha \parallel \beta$ e $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são reversas.

II. Verdadeira.

Os planos α e β não são paralelos e as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são paralelas.

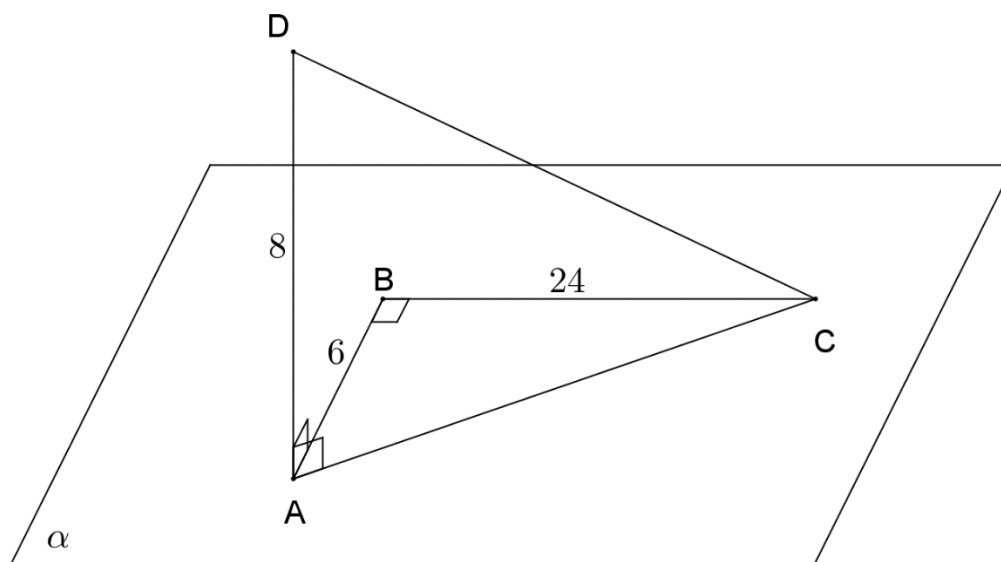
Para demonstrar esse paralelismo, basta observar que, sendo t a reta que contém o segmento GH (intersecção dos planos α e β), então $r_1 \parallel t$ e $r_2 \parallel t$, o que implica $r_1 \parallel r_2$.

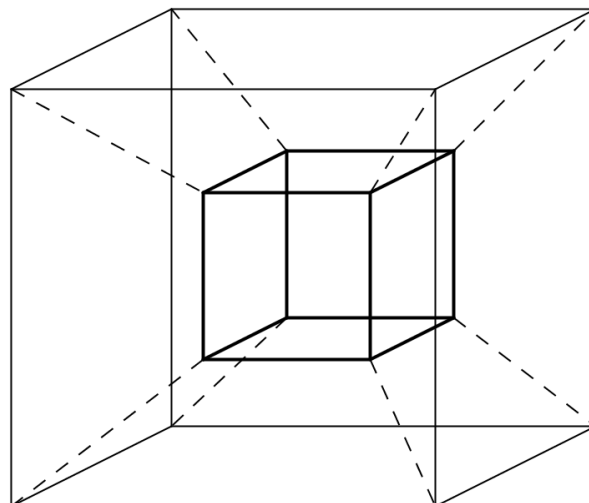
III. Verdadeira, por definição de perpendicularidade entre reta e plano.

19) Considere um plano α e os pontos A, B, C e D tais que
O segmento AB tem 6 cm de comprimento e está contido em α.
O segmento BC tem 24 cm de comprimento, está contido em α e é perpendicular a AB.
O segmento AD tem 8 cm de comprimento e é perpendicular a α.
Nessas condições, a medida do segmento CD é
a) 26 cm
b) 28 cm
c) 30 cm
d) 32 cm

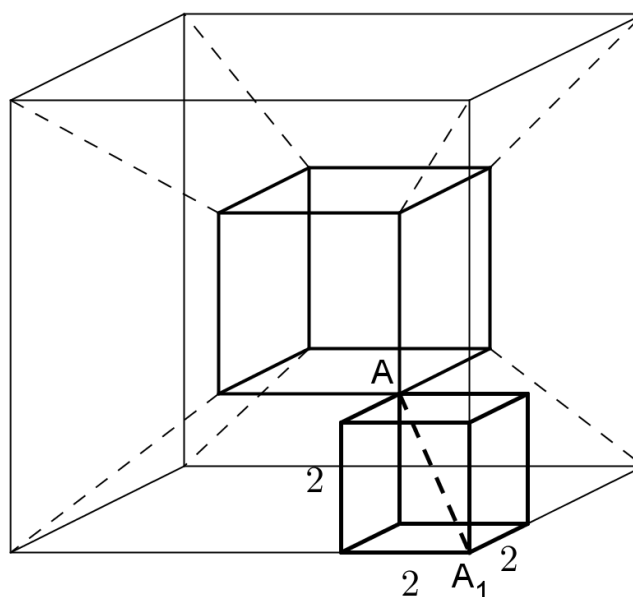
e) 34 cm

RESPOSTA: a

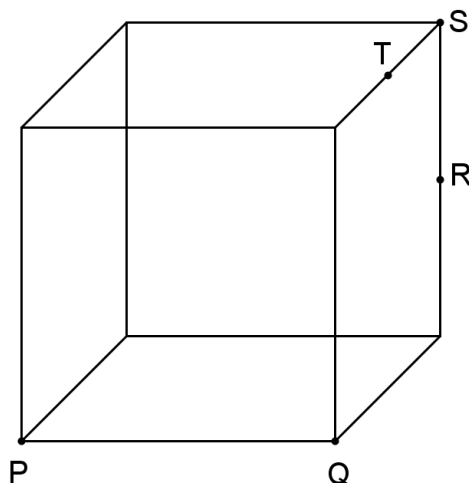
RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 24^2 = 36 + 576 = 612$.
Como $AD \perp \alpha$, então $AD \perp AC \in \alpha$. Logo, o triângulo ACD é retângulo em A.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD, temos:
$CD^2 = AD^2 + AC^2 = 8^2 + 612 = 676 \Leftrightarrow CD = 26 \text{ cm}$.

20) A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.
Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, 8 cm e 4 cm, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}$ cm
b) $3\sqrt{2}$ cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $4\sqrt{3}$ cm
e) $6\sqrt{3}$ cm

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
As informações do enunciado permitem concluir que os dois cubos possuem o mesmo centro e arestas e faces paralelas.

Prolongando-se as arestas do cubo menor, a partir do vértice A, até atingir uma face do cubo maior, determina-se um novo cubo de aresta 2 cuja diagonal AA_1 é uma das arestas que liga os dois cubos.

Portanto, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é igual à medida da diagonal de um cubo de aresta 2, ou seja, $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

21) Na figura abaixo está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas. Sabe-se que a aresta desse cubo mede 2 cm. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos PQRST, em cm^3, é

a) $\frac{2}{3}$

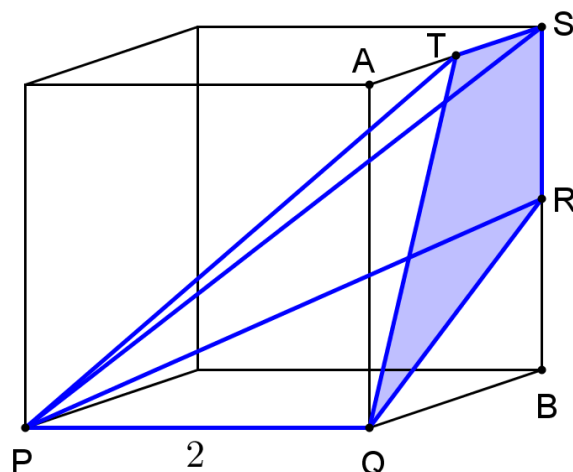
b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{16}{3}$

e) $\frac{32}{3}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

O sólido geométrico definido pelos pontos PQRST é uma pirâmide de base quadrangular RSTQ e vértice P.
O segmento PQ é perpendicular ao plano determinado por RSTQ, então $PQ = 2$ é a altura da pirâmide.
A

Como R e T são pontos médios das arestas, então $S_{QAT} = S_{QTS} = S_{QBR} = S_{QRS} = \frac{S_{ASBQ}}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$.

Logo, a área da base da pirâmide é $S_{RSTQ} = S_{QTS} + S_{QRS} = 1 + 1 = 2$.

Portanto, o volume da pirâmide quadrangular PQRST é $S_{PQRST} = \frac{1}{3} \cdot S_{RSTQ} \cdot PQ = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}\text{ cm}^3$.

22) A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, T_1 e T_2, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura.

O tanque T_1 contém gasolina pura e o tanque T_2 contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol.

Deseja-se transferir gasolina pura do tanque T_1 para T_2 até que o teor de etanol na mistura em T_2 caia para 20%.

Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de T_1 e T_2 será

a) $\frac{1}{2}h$
b) $\frac{1}{3}h$
c) $\frac{1}{4}h$
d) $\frac{1}{5}h$
e) $\frac{1}{6}h$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O volume de gasolina inicialmente em T_1 é $V_1 = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3}h$.

O volume de gasolina inicialmente em T_2 é $Vg_2 = 75\% \cdot \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = \pi R^2 h$ e o volume de etanol é $Ve_2 = 25\% \cdot \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Seja V o volume de gasolina pura que devemos transferir do tanque T_1 para T_2 para que o teor de etanol na mistura em T_2 caia para 20%, então $\frac{Ve_2}{Vg_2 + V} = \frac{20\%}{80\%} = \frac{1}{4}$.

Assim, temos: $\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\pi R^2 h + V} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^2 h = \pi R^2 h + V \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Sejam Vf_1 e h'_1 o volume final e a altura final do líquido no tanque T_1, então $Vf_1 = V_1 - V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi R^2 \cdot h'_1 \Leftrightarrow h'_1 = \frac{h}{3}$.

Sejam Vf_2 e h'_2 o volume final e a altura final do líquido no tanque T_2, então $Vf_2 = V_2 + V = \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h + \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{5}{3}\pi R^2 h = \pi\left(R\sqrt{2}\right)^2 \cdot h'_2 \Leftrightarrow h'_2 = \frac{5h}{6}$.

Portanto, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de T_1 e T_2 é $h'_2 - h'_1 = \frac{5h}{6} - \frac{h}{3} = \frac{3h}{6} = \frac{h}{2}$.

23) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é

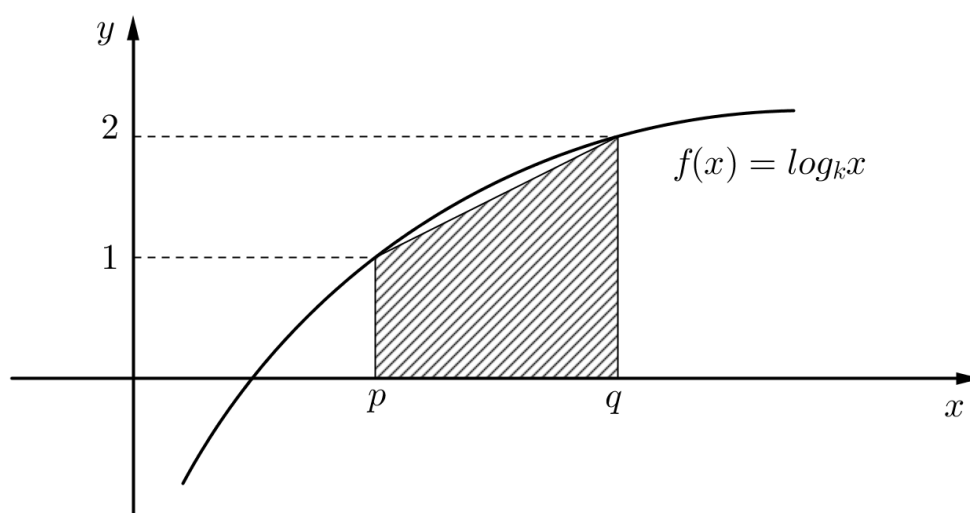



Gráfico fora de escala

a) -20
b) -15
c) 10
d) 15
e) 20

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Os pontos $(p,1)$ e $(q,2)$ estão no gráfico de $f(x) = \log_k x$, então
$f(p) = \log_k p = 1 \Leftrightarrow p = k^1 = k$ e
$f(q) = \log_k q = 2 \Leftrightarrow q = k^2$.
A área do trapézio sombreado é dada por

$S=\frac{(2+1)\cdot(q-p)}{2}=\frac{3}{2}\cdot(k^2-k)=30\Leftrightarrow k^2-k-20=0\Leftrightarrow k=-4$ ou $k=5$.

Como $k>0$ e $k\neq 1$, então $k=5$, $p=5$ e $q=25$. Portanto, $k+p-q=5+5-25=-15$.

24) O ponto da circunferência $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ que tem ordenada máxima é

a) $(0,-6)$

b) $(-1,-3)$

c) $(-1,0)$

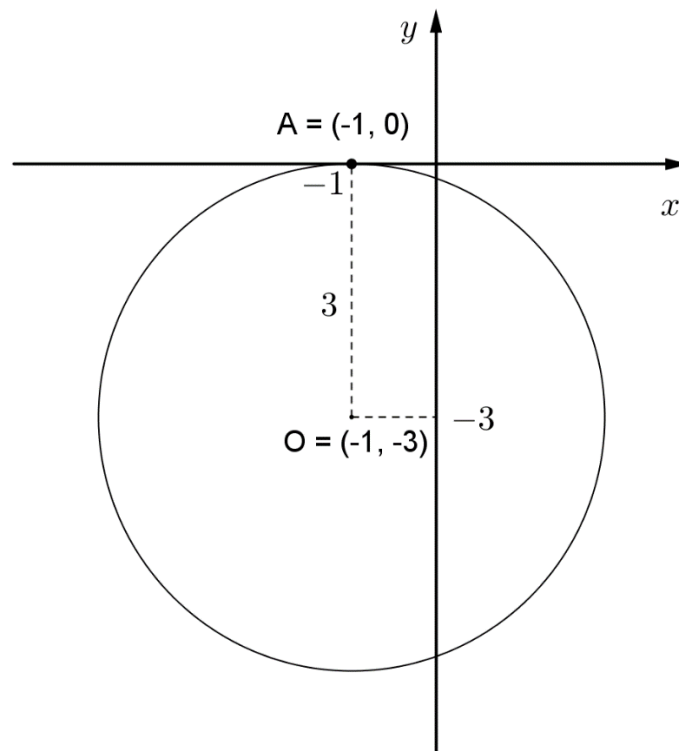
d) $(2,3)$

e) $(2,-3)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$x^2+y^2+2x+6y+1=0\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+6y+9=9\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=3^2$

Assim, a equação acima corresponde a uma circunferência de centro $(-1,-3)$ e raio $r=3$.

O ponto de ordenada máxima é o centro da circunferência deslocado de 3 unidades (valor do raio) na vertical, ou seja, $(-1,0)$.

25) Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que $A(x)=B(x)+3x^3+2x^2+x+1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3)-B(-1)$ é igual a

a) 98

b) 100
c) 102
d) 103
e) 105

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Como -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, temos $A(-1)=0$ e $B(3)=0$.

$A(x)=B(x)+3x^3+2x^2+x+1$

$\Rightarrow A(-1)=B(-1)+3\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+(-1)+1 \Leftrightarrow 0=B(-1)-1 \Leftrightarrow B(-1)=1$

$\Rightarrow A(3)=B(3)+3\cdot 3^3+2\cdot 3^2+3+1 \Leftrightarrow A(3)=0+103=103$

$\Rightarrow A(3)-B(-1)=103-1=102$

26) O ponto $P\left(a,\frac{1}{3}\right)$ pertence à parábola $x=\frac{y^2+3}{3}$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:
a) $27x+27y-37=0$
b) $37x+27y-27=0$
c) $27x+37y-27=0$
d) $27x+27y-9=0$
e) $27x+37y-9=0$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Se o ponto $P\left(a,\frac{1}{3}\right)$ pertence à parábola $x=\frac{y^2+3}{3}$, então $a=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+3}{3}=\frac{28}{27}$.

A bissetriz dos quadrantes ímpares tem coeficiente angular $m=1$, então uma reta perpendicular a ela deve ter coeficiente angular $m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{1}=-1$.

Assim, a reta pedida possui coeficiente angular $m'=-1$ e passa pelo ponto $P\left(\frac{28}{27},\frac{1}{3}\right)$. Logo, sua equação é dada por

$$\frac{y-\frac{1}{3}}{x-\frac{28}{27}}=-1 \Leftrightarrow y-\frac{1}{3}=-x+\frac{28}{27} \Leftrightarrow 27y-9=-27x+28 \Leftrightarrow 27x+27y-37=0.$$

27) A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2-y^2=36x+8y-11$ é dada por
a) duas retas concorrentes.

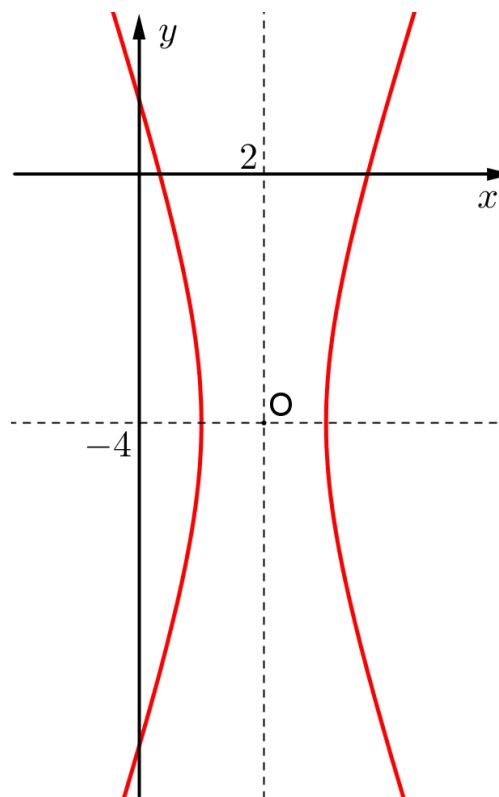
b) uma circunferência.
c) uma elipse.
d) uma parábola.
e) uma hipérbole.

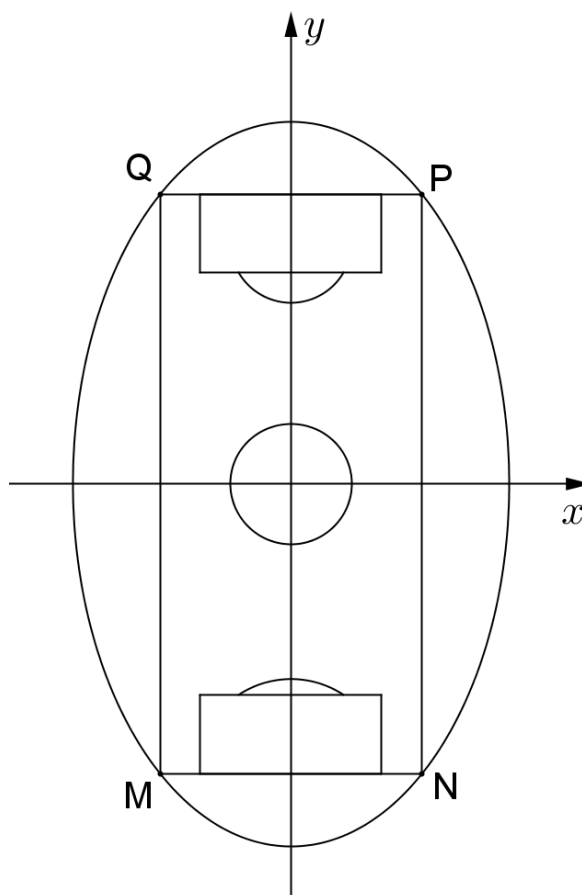
RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

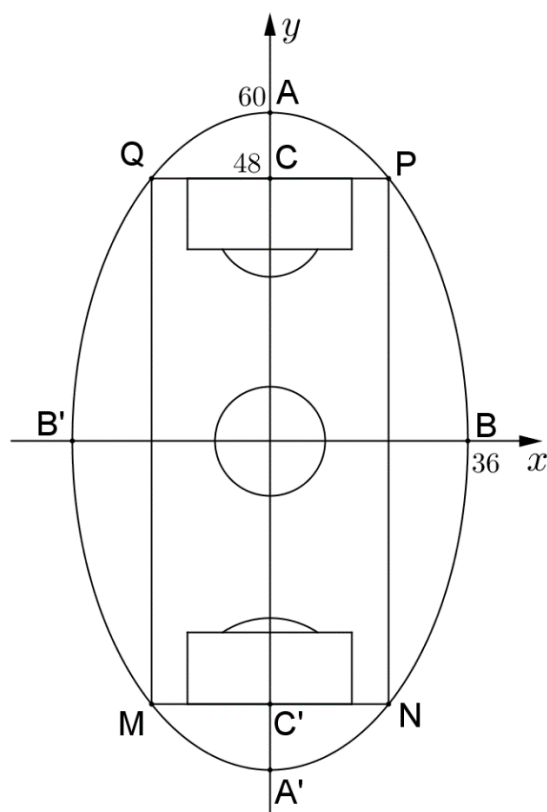
$9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11 \Leftrightarrow 9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = -11 + 36 - 16$

$\Leftrightarrow 9(x-2)^2 - (y+4)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{1^2} - \frac{(y+4)^2}{3^2} = 1$

Essa equação representa uma hipérbole de centro $(2, -4)$, semieixo real $a = 1$ horizontal e semieixo imaginário $b = 3$ vertical.

28) Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.

Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

a) 48 m
b) 68 m
c) 84 m
d) 92 m
e) 96 m

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$ representa uma elipse com centro em $(0,0)$, semieixo menor $b=36$ horizontal e semieixo maior $a=60$ vertical.
Portanto, os focos estão sobre o eixo y e satisfazem $c^2=a^2-b^2=60^2-36^2=96\cdot 24 \Leftrightarrow c=48$. Logo, os focos são $C(0,48)$ e $C'(0,-48)$.

Como os focos estão sobre os lados do retângulo, então a distância entre as retas MN e PQ é igualo à distância focal, ou seja, $2c = 2 \cdot 48 - 96$ m.

29) As medidas em centímetros das arestas de um bloco retangular são as raízes da equação polinomial $x^3 - 14x^2 + 64x - 96 = 0$. Denominando-se r, s e t essas medidas, se for construído um novo bloco retangular, com arestas medindo $(r-1)$, $(s-1)$ e $(t-1)$, ou seja, cada aresta medindo 1 cm a menos que a do bloco anterior, a medida do volume desse novo bloco será

a) $36\ \text{cm}^3$

b) $45\ \text{cm}^3$

c) $54\ \text{cm}^3$

d) $60\ \text{cm}^3$

e) $80\ \text{cm}^3$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
As arestas do novo bloco retangular são as raízes de uma equação transformada de raízes $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$. Assim, temos:

$(y+1)^3 - 14(y+1)^2 + 64(y+1) - 96 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + 39y - 45 = 0$.

Sendo assim, o volume do novo bloco retangular é igual ao produto das raízes da nova equação, ou seja, $V = \sigma_3 = -(-45) = 45\ \text{cm}^3$.

30) Seja a função complexa $P(x)=2x^3-9x^2+14x-5$. Sabendo-se que $2+i$ é raiz de P, o maior intervalo I de números reais que faz $P(x)<0$, para todo $x\in I$, é

a) $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

b) $]0,1[$

c) $\left]\frac{1}{4},2\right[$

d) $]0,+\infty[$

e) $\left]-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como $P(x)=2x^3-9x^2+14x-5$ é um polinômio de coeficientes reais, se $2+i$ é raiz de P, então $2-i$ também é raiz de P.

Seja r a terceira raiz de P, então, pelas relações de Girard, temos:

$$\sigma_1=\frac{-(-9)}{2}=(2+i)+(2-i)+r\Leftrightarrow r=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}.$$

Logo, $P(x)<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$, ou seja, $I=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EsPCEx – 2010/2011

1) A represa de uma usina hidroelétrica está situada em uma região em que a duração do período chuvoso é 100 dias. A partir dos dados hidrológicos dessa região, os projetistas concluíram que a altura do nível da represa varia, dentro do período chuvoso, segundo a função real

$$N(t)=\begin{cases} \frac{t}{5}+8, & \text{para } 0\le t<20 \\ -\frac{t^2}{100}+\frac{4t}{5}, & \text{para } 20\le t<50 \\ -\frac{3t}{25}+21, & \text{para } 50\le t\le 100 \end{cases}$$

Em que $N(t)$ é a altura do nível da represa, medido em metros, t é o número de dias, contatos a partir do início do período chuvoso.

Segundo esse modelo matemático, o número de dias, dentro do período chuvoso, em que a altura do nível da represa é maior ou igual a 12 metros é

a) 40
b) 41
c) 53
d) 56
e) 60

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

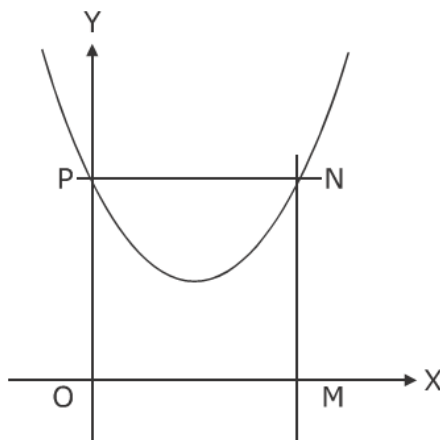
A função $f_1(t)=\frac{t}{5}+8$, para $t\in[0,20[$, é uma função do 1º grau com coeficiente líder positivo, então cresce de $f_1(0)=8$ até $f_1(20)=12$ (aberto).

A função $f_2(t)=-\frac{t^2}{100}+\frac{4t}{5}$ é uma função quadrática com coeficiente líder negativo. Ela assume o valor 12 quando $f_2(t)=-\frac{t^2}{100}+\frac{4t}{5}=12 \Leftrightarrow t^2-80t+1200=0 \Leftrightarrow t=20$ ou $t=60$ e tem ponto de máximo em $x_V=\frac{-4/5}{2\cdot(-1/100)}=40$. Assim, a função f_2 cresce de $f_2(20)=12$ até $f_2(40)=16$ e decresce até $f_2(50)=15$ (aberto).

A função $f_3(t)=-\frac{3t}{25}+21$, para $t\in[50,100]$, é uma função do 1º grau com coeficiente líder negativo, então decresce de $f_3(50)=15$ até $f_3(100)=9$ passando por $f_3(75)=12$.

Assim, $f(x)\ge 12 \Leftrightarrow x\in[20,75]$.

Portanto, o número de dias, dentro do período chuvoso, em que a altura do nível da represa é maior ou igual a 12 metros é $75-20+1=56$.

2) Na figura abaixo, estão representados um sistema de eixos coordenados com origem O, o gráfico de uma função real do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e o quadrado $OMNP$, com 16 unidades de área. Sabe-se que o gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos P e N, vértices do quadrado, e pelo ponto de encontro das diagonais desse quadrado. Assim, o valor de $a+b+c$ é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O quadrado OMNP tem 16 unidades de área, então o lado desse quadrado é $\sqrt{16} = 4$.
O gráfico de $f(x)$ passa pelos pontos $P(0,4)$, $N(4,4)$ e pelo ponto de encontro das diagonais do quadrado $(2,2)$.
O ponto $(2,2)$ é o vértice da parábola, pois equidista dos pontos P e N de mesma ordenada. Assim, temos:
$P(0,4) \in f \Leftrightarrow f(0) = c = 4$
$x_V = -\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$
$y_V = f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 = 2 \Rightarrow 4a + 2 \cdot (-4a) + 4 = 2 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ e $b = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$.
Logo, $a + b + c = \frac{1}{2} + (-2) + 4 = \frac{5}{2}$.

3) Dada a expressão $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}$, em que x é um número real qualquer, podemos afirmar que
a) o maior valor que a expressão pode assumir é 3.
b) o menor valor que a expressão pode assumir é 3.
c) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{81}$.
d) o maior valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{27}$.
e) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{9}$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A função $y = 4x - x^2$ é uma função quadrática com coeficiente líder negativo, então assume valor máximo $y_V = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$ quando $x_V = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$.
A função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}$ de base menor do que 1 é decrescente, então o valor máximo do expoente corresponde ao valor mínimo da função exponencial.
Portanto, o menor valor da função é $f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

4) Sendo $x = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$, com $\log_2 a = 4$ e $\log_2 b = 5$, em que a e b são números reais não nulos e diferentes de 1, então $\log_x 2$ é igual a
a) 16
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$\log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 2^4$
$\log_2 b = 5 \Leftrightarrow b = 2^5$
$x = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b}} = \sqrt[6]{\frac{(2^4)^2}{2^5}} = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\log_x 2 = \log_{2^{1/2}} 2 = \frac{1}{1/2} \cdot \log_2 2 = 2$

5) O conjunto solução da inequação $x^{\log_x (x+1)^2} \leq 4$, no conjunto dos números reais, é
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como x é base de um logaritmo, então $0 < x \neq 1$.
$x^{\log_x (x+1)^2} \leq 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$
Considerando a condição de existência, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

6) Considerando a função real $f(x) = (x-1) \cdot |x-2|$, o intervalo real para o qual $f(x) \geq 2$ é
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Se $x < 2$, então $f(x) = (x-1) \cdot |x-2| = (x-1) \cdot (2-x) = -x^2 + 3x - 2$.
$f(x) = -x^2 + 3x - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leq 0 \Rightarrow \Delta = -7 < 0 \Rightarrow S = \varnothing$
Se $x \geq 2$, então $f(x) = (x-1) \cdot |x-2| = (x-1) \cdot (x-2) = x^2 - 3x + 2$.
$f(x) = x^2 - 3x + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3$
$x > 2 \Rightarrow S = [3, +\infty[$
Portanto, $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

7) Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$. Se todos os termos consecutivos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um
a) pentágono (5 lados)
b) hexágono (6 lados)
c) octógono (8 lados)
d) decágono (10 lados)
e) dodecágono (12 lados)

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A razão da P.A. é $r = \frac{47\pi}{60} - \frac{7\pi}{12} = \frac{12\pi}{60} = \frac{\pi}{5}$.
Como $\frac{2\pi}{r} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$, então a razão é um divisor inteiro de uma volta.
Assim, os termos da P.A. dispostos sobre o ciclo trigonométrico determinarão os vértices de um decágono (10 lados).

8) Os alunos de uma escola realizam experiências no laboratório de Química utilizando 8 substâncias diferentes. O experimento consiste em misturar quantidades iguais de duas dessas substâncias e observar o produto obtido. O professor recomenda, entretanto, que as substâncias S1, S2 e S3 não devem ser misturadas entre si, pois produzem como resultado o gás metano, de odor muito ruim. Assim, o número possível de misturas diferentes que se pode obter, sem produzir o gás metano é
a) 16
b) 24
c) 25
d) 28
e) 56

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O número total de misturas utilizando 2 dentre 8 substâncias é $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$.
O número de misturas utilizando 2 das 3 substâncias S1, S2 e S3 é $C_3^2 = 3$.
Assim, o número de misturas que se pode obter, sem que as substâncias S1, S2 e S3 não devem ser misturadas entre si, é $28 - 3 = 25$.

9) Um menino, de posse de uma porção de grãos de arroz, brincando com um tabuleiro de xadrez, colocou um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, oito grãos na quarta casa e continuou procedendo desta forma até que os grãos acabaram, em algum momento,

enquanto ele preenchia a décima casa. A partir dessas informações, podemos afirmar que a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou na brincadeira é
a) 480
b) 511
c) 512
d) 1023
e) 1024

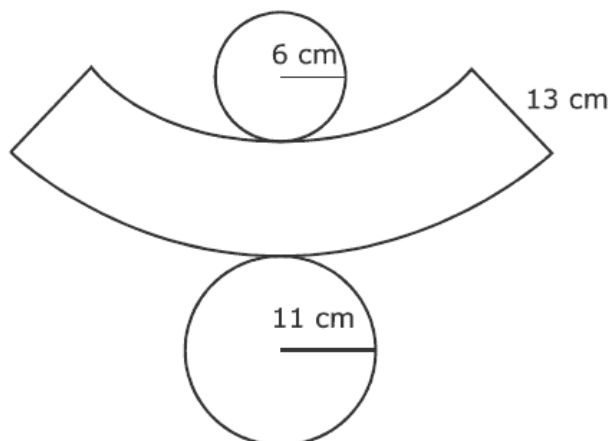
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A quantidade de grãos de arroz necessária para preencher as nove primeiras casas é $1+2^1+2^3+\ldots+2^8=\frac{1\cdot\left(2^9-1\right)}{2-1}=511$ que é a soma dos nove primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 a razão 2.
Assim, a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou é $511+1=512$.

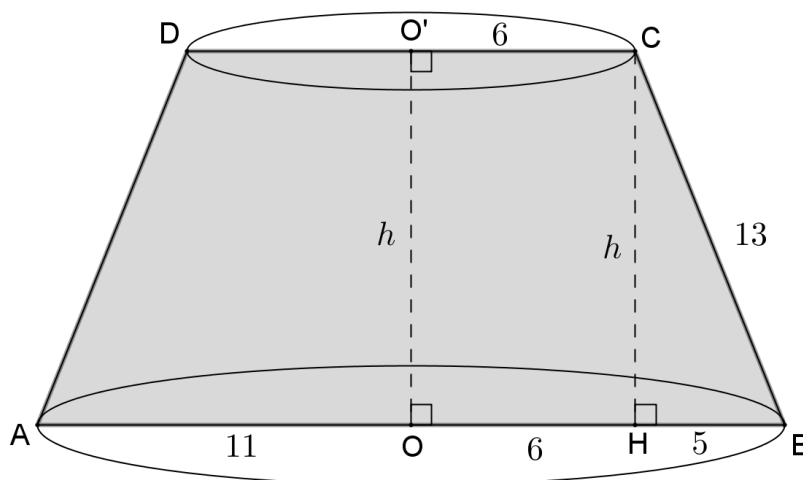
10) Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x+y=5 \\ ax+2y=b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a+b$ é:
a) -1
b) 4
c) 9
d) 14
e) 19

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Para que o sistema seja possível e indeterminado, deve-se ter: $\frac{2}{a}=\frac{1}{2}=\frac{5}{b}\Leftrightarrow a=4\wedge b=10$.
Portanto, $a+b=4+10=14$.

11) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.
A medida da altura desse tronco de cone é

a) 13 cm
b) 12 cm
c) 11 cm
d) 10 cm
e) 9 cm

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

O trapézio isósceles ABCD é a seção meridiana do tronco de cone.
Seja $CH \perp OB$, então $HB = OB - OH = 11 - 6 = 5$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BHC, temos:
$h^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow h^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow h = 12\,\text{cm}$.

12) Se forem tomadas ao acaso duas arestas de um prisma reto de bases triangulares, a probabilidade de que elas estejam em retas-suporte reversas é

a) $\frac{1}{3}$

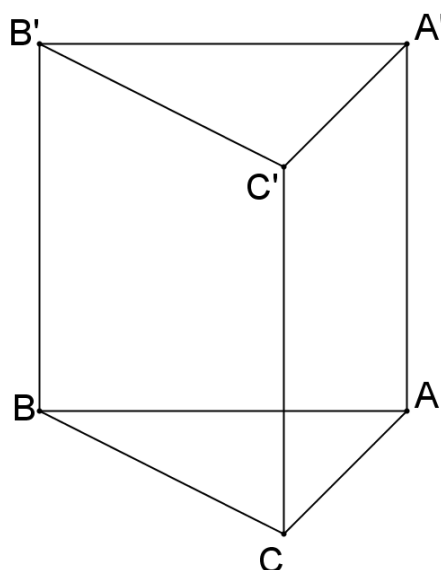
b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{4}$

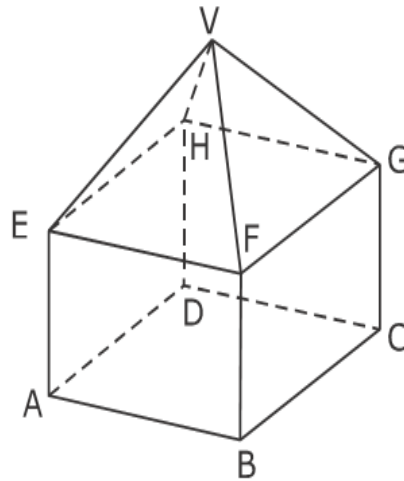
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Um prisma reto de bases triangulares possui 9 arestas.

O número total de maneiras de escolher duas arestas é $\#(\Omega) = C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$

Identificação dos pares de retas reversas:
1º) Aresta lateral e aresta da base não concorrente a ela:
AA’-BC, AA’-B’C’, BB’-AC, BB’-A’C’, CC’-AB, CC’-A’B’.
2º) Aresta da base e arestas não paralelas a ela na outra base:
AC-B’C’, AC-A’B’, BC-A’C’, BC-A’B’, AB-B’C’ e AB-A’C’.
Logo, o número de casos favoráveis é $\#(A) = 6 + 6 = 12$.
Portanto, a probabilidade pedida é $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

13) Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtidos a partir de um cubo e uma pirâmide. Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida ℓ, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $\ell\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+4\right)$

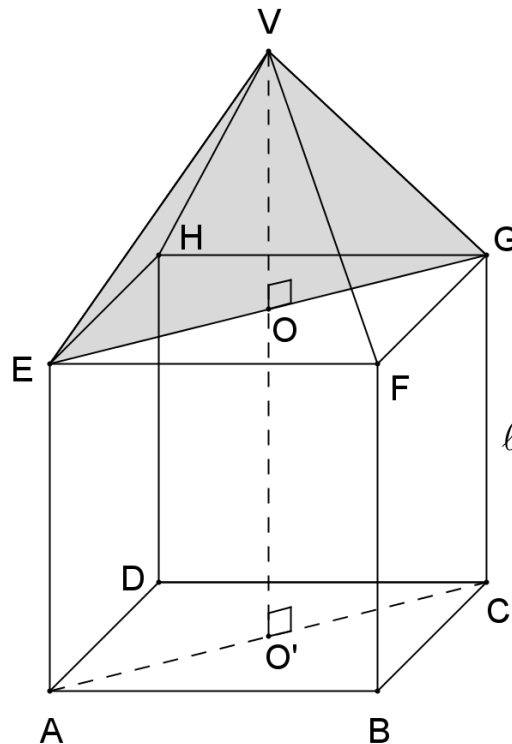
b) $\ell\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

c) $\ell\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $\ell\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

e) $\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Vamos inicialmente calcular a altura da pirâmide V-EFGH.

A seção EGV da pirâmide é um triângulo isósceles, onde $EV = GV = \ell$ e $EG = \ell\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado).

A altura $VO = h$ do vértice pode ser obtida aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VOG. Assim, temos: $h^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{2\ell^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

A altura do sólido é dada por $VO' = VO + OO' = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} + \ell = \ell\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

A superfície total do sólido é dada por 5 quadrados de lado ℓ e 4 triângulos equiláteros de lado ℓ. Assim, temos: $S_{total} = 5\cdot\ell^2 + 4\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \ell^2\left(5+\sqrt{3}\right)$.

14) Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma abcdef-xy, em que a sequência (abcdef) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B = C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são
a) 34
b) 41
c) 49
d) 51
e) 54

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-5) \\ (6-2) \\ (8-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_2}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z = -1 \Leftrightarrow z = 1 \\ y = 4 \\ x - 2y + z = -2 \Leftrightarrow x - 2 \cdot 4 + 1 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$$

Portanto, os dígitos verificadores são $xy = 54$.

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 5A COLÉGIO NAVAL 2008-2015